DM8 - Corrigé

Exercice 1 :

1. L'application $p_2 : E \times F \to F, (u_E, u_F) \mapsto u_F$ est une application linéaire et $\mathrm{Ker} p_2 = G_1$. Donc G_1 est un ss-ev de $E \times F$.
   De plus, l'application, $\varphi_1 = p_1|_{G_1} : G_1 \to E, (u_E, 0_F) \mapsto u_E$ est une bijection linéaire. Donc G_1 est isomorphe à E.
2. De même $G_2 = \mathrm{Ker} p_1$ avec $p_1 : E \times F \to E, (u_E, u_F) \mapsto u_E$ est un ss-ev de $E \times F$ isomorphe à F.
   On a $G_1 \cap G_2 = \{0_E\} \times \{0_F\} = \{(0_E, 0_F\}$ donc la somme est directe.
   Tout vecteur $u = (u_E, u_F) \in E \times F$ s'écrit sous la forme $u = (u_E, 0_F) + (0_E, u_F) \in G_1 + G_2$ donc la somme est totale.
3. On a $\dim G_1 = \dim E$ et $\dim G_2 = \dim F$ car les espaces sont isomorphes.
   Puis $\dim(E \times F) = \dim G_1 + \dim G_2$ car ils sont supplémentaires.
   Donc $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.
4. En utilisant l'isomorphisme naturel : $\varphi : E^{n+1} \to E^n \times E, (u_1, ..., u_n, u_{n+1}) \mapsto ((u_1, ..., u_n), u_{n+1})$ et la question précédente, on obtient $\dim E^{n+1} = \dim E^n + \dim E$.
   Puis une récurrence immédiate, démontre que $\dim E^n = n \dim E$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2 :

1. Si $\deg(P) \leq n$ alors $\deg\left(\frac{1}{n} P'\right) \leq n - 1$. Donc l'application est bien définie.
   Les ensembles $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}$ sont des $\mathbb{R}$-ev de même dimension $n+1$ d'après l'exercice précédent.
   Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On a $f_n(P_1 + \lambda P_2) = ... = f_n(P_1) + \lambda f_n(P_2)$ par le calcul. Donc l'application est linéaire.
   Enfin $P \in \mathrm{Ker} f_n$ ssi $P' = 0$ et $\int_0^1 P = 0$
   ssi $\exists k \in \mathbb{R}, P = k$ et $\int_0^1 k = k = 0$ ssi $P = 0$. Donc $\mathrm{Ker} f_n = \{0\}$ et l'application est injective.
   Par caractérisation par la dimension, f_n est un isomorphisme.
2. On démontre par récurrence l'existence et l'unicité d'un $B_n \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Init. $n = 0$ L'énoncé fixe $B_0(X) = 1 \in \mathbb{R}_0[X]$.
   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_n(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ est fixé de manière unique. Alors $(B_n, 0) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}$ donc il admet un unique antécédent par f_{n+1}. C'est à dire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $\frac{1}{n+1} P' = B_n$ et $\int_0^1 P = 0$. Ce polynôme $P = B_{n+1}$ est donc l'unique solution dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ par définition de bijection.
3. On a $B_1 = X + c$ par intégration puis $c = -1/2$ pour que $\int_0^1 B_1 = 0$. Donc $B_1(X) = X - 1/2$.
   On a $B_2' = 2B_1 = 2X - 1$ puis $B_2(X) = X^2 - X + c$ donc $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$ afin que $\int_0^1 B_2 = 0$.
   De même, on trouve $B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x$.
4. On montre par récurrence que $B_n(X) = X^n + ...$
   On a déjà vérifié l'hypothèse pour $0 \leq n \leq 3$.
   Hérédité : On a $B_{n+1}' = (n+1) B_n = (n+1) X^n + ...$ par HR.
   Donc $B_{n+1} = X^{n+1} + ...$ en primitivant le polynôme.
5. On a $B_0(1 - X) = 1 = B_0(X)$ donc la proposition est vraie au rang $n = 0$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_n(1 - X) = (-1)^n B_n(X)$.
   On a $[B_{n+1}(1 - X)]' = -B_{n+1}'(1 - X) = -(n+1) B_n(1 - X) = (n+1)(-1)^{n+1} B_n(X)$ par HR.
   Et $\int_0^1 B_{n+1}(1 - t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 B_{n+1}(u)\, \mathrm{d}u = 0$ avec le changement de variable $u = 1 - t$.
   Ainsi $f_{n+1}(B_{n+1}(1-X)) = \left((-1)^{n+1} B_n(X), 0\right) = (-1)^{n+1}(B_n, 0) = (-1)^{n+1} f_{n+1}(B_{n+1}) = f_{n+1}\left((-1) B_{n+1}(X)\right)$. Ainsi $B_{n+1}(1 - X) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(X)$ par injectivité de f_{n+1}.

6. De même, on a $B_0(X+1) - B_0(X) = 1 - 1 = 0$.
Puis $(B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X))' = (n+1)[B_n(X+1) - B_n(X)] = (n+1)nX^{n-1} = [(n+1)X^n]'$ par HR. Et en $X = 0$, on a $B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = \int_0^1 B'_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (n+1)B_n = 0$. Donc $B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = (n+1)X^n$.
7. Par telescopage, $S = \sum_{k=0}^{n-1} B_3(k+1) - B_3(k) = B_3(n) - B_3(0) = B_3(n) = \frac{2n^3-3n^2+n}{2}$.

   D'après la question précédente, $S = \sum_{k=0}^{n-1} 3k^2 = 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2$.
   Donc $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3-3n^2+n}{6} + n^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.