Devoir Surveillé de Mathématiques n$^{\text{o}}$ 9
le samedi 5 Avril 2025 - durée 4h

Problème I :

1. On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ définie par $p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -y-2z \\ y+2z \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer les espaces propres de p.
2. On définit $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer le projecteur q sur $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2, u_3)$ le long de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1)$.
3. Montrer que $p \circ q = q \circ p$ et en déduire que $p \circ q$ est un projecteur.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker} p \oplus \mathrm{Ker} q$ et que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(p+q)^n = p + (2^n - 2) p \circ q + q$.
6. On définit $s = p - q + p \circ q$.
   (a) Montrer que s est un symétrie et préciser ses espaces propres.
   (b) Montrer que $p \circ s = s \circ p$. Est-ce que les endomorphismes q et s commutent ?

Problème II : Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites complexes bornées.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
2. Pour toute suite $u = (u_n)_{n \in N} \in \mathcal{B}$, on note $T(u)$ la suite définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, [T(u)]_n = u_{n+1}.$$
   (a) Montrer que l'application $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de T. S'agit-il d'une application injective ?
   (c) Montrer que T est une application surjective.
3. Pour toute suite $u = (u_n)_{n \in N} \in \mathcal{B}$, on note $S(u)$ la suite définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, [S(u)]_n = u_{n-1} \text{ et } [S(u)]_0 = 0.$$
   (a) Montrer $S : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est linéaire puis que $T \circ S = Id_{\mathcal{B}}$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(S \circ T) = \mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(S \circ T) = \mathrm{Im}(S)$.
   (c) En déduire que $\mathcal{B} = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(S)$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit que λ est une valeur propre de l'endomorphisme T s'il existe un élément $u \in \mathcal{B}$ tel que : $u \neq 0_{\mathcal{B}}$ et $T(u) = \lambda u$.
   (a) Montrer que λ est une valeur propre de T ssi $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id_{\mathcal{B}}) \neq \{0_{\mathcal{B}}\}$.
   (b) On pose ici $\lambda = 1/2$. Déterminer toutes les suites $u \in \mathcal{B}$ telles que $T(u) = (1/2)u$.
   (c) On pose ici $\lambda = 2$. Déterminer toutes les suites $u \in \mathcal{B}$ telles que $T(u) = 2u$.
   (d) Montrer que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de T ssi $|\lambda| \leq 1$.
5. On recherche les suites bornées $(u_n)_{n \geq 0}$ telles $\forall n \in \mathbb{N}, 6u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n = \frac{B(n)}{2^n}$ pour $B \in \mathbb{C}[X]$ fixé. On introduit $f = 6T^2 - 5T + Id_{\mathcal{B}}$.
   (a) Montrer que $b = \left(\frac{B(n)}{2^n}\right)_{n \geq 0} \in \mathcal{B}$ et réécrire l'équation à l'aide de l'application f.
   (b) Pour $v \in \mathcal{B}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} v_k$. Montrer que $T(u) = \lambda u + v$.
   (c) En déduire que $\mathrm{Im}\,(T - \lambda Id_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}$ puis que $\mathrm{Im} f = \mathcal{B}$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}\left(T - \frac{1}{2} Id_{\mathcal{B}}\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(T - \frac{1}{3} Id_{\mathcal{B}}\right)$.
   (e) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation.

Problème III : Dans l'ensemble du problème, P_1, P_2, P_3 désignent trois polynômes distincts de $\mathbb{R}[X]$ et a_1, a_2, a_3 désignent trois réels distincts.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = P(a_1)P_1 + P(a_2)P_2 + P(a_3)P_3.$$

1. On considère les polynômes :
   $L_1(X) = \frac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} \quad L_2(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$ et $L_3(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$
   (a) Déterminer $L_i(a_j)$ pour $i \in \{1,2,3\}$ et $j \in \{1,2,3\}$.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_2 = (L_1, L_2, L_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer les coordonnées de P dans $\mathcal{B}_2$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. L'application f est-elle surjective ? On pourra étudier les degrés des polynômes P_1, P_2, P_3 et $f(P)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.
4. On recherche à calculer le noyau de f. On note $Q(X) = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$.
   (a) On suppose que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre.
   Montrer que $\mathrm{Ker} f = \{P \in \mathbb{R}[X]$ tel que Q divise $P\}$.
   (b) On suppose que la famille (P_1, P_2, P_3) est liée.
   Montrer qu'il existe $P_0 \in \mathrm{Ker} f$ non divisible par Q.
   On pourra exprimer P_0 en fonction des polynômes L_1, L_2 et L_3.
   (c) L'application est-elle injective ? Si oui, dans quel cas ?
5. Soit $n \geq 3$ un entier. On suppose désormais que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre et ses polynômes appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$. On note $f_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto f(P)$.
   (a) Montrer que f_n est bien un endomorphisme.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im} f_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(P_1, P_2, P_3)$.
   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f_n$, on précisera sa dimension.
6. On suppose, dans cette question, que $P_k = L_k$.
   Montrer que f est un projecteur et préciser ses espaces propres.
7. Dans cette partie, on suppose que $n = 3$,
   $a_1 = -1, a_2 = 0$ et $a_3 = 1$, $P_1 = X^2 + X + 1, P_2 = X^2 - 2X$ et $P_3 = -3X + 1$.
   (a) La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle libre ou liée ?
   (b) Calculer $f_3(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$.
   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f_3$.
   (d) A-t-on $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Ker} f_3 \oplus \mathrm{Im} f_3$?