DS9 de Mathématiques - Corrigé

Problème I : 1. (a) On montre que p est linéaire.

On a $p\begin{pmatrix} x_1+\lambda x_2 \\ y_1+\lambda y_2 \\ z_1+\lambda z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+\lambda x_2)+(y_1+\lambda y_2)+(z_1+\lambda z_2) \\ -(y_1+\lambda y_2)-2(z_1+\lambda z_2) \\ (y_1+\lambda y_2)+2(z_1+\lambda z_2) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 \\ -y_1-2z_1 \\ y_1+2z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2+y_2+z_2 \\ -y_2-2z_2 \\ y_2+2z_2 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On montre que $p \circ p = id_{\mathbb{R}^3}$.

On a $p^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} x+y+z \\ -y-2z \\ y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y+z)+(-y-2z)+(y+2z) \\ -(-y-2z)-2(y+2z) \\ (-y-2z)+2(y+2z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -y-2z \\ y+2z \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(b) On sait que p est le projecteur sur Imp le long de Ker$p$.

On calcul Ker$p$. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On a : $u \in \mathrm{Ker}p$ ssi $\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ -y-2z &= 0 \\ y+2z &= 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x &= -y-z = z \\ y &= -2z \\ z &\in \mathbb{R} \end{cases}$.

Donc Ker$p = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On calcul Im$p = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. (a) On calcul le rang de la famille.

$\mathrm{rg}\mathcal{B} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \ldots = 3$ avec le pivot de Gauss-Jordan.

Donc la famille est une base de $\mathbb{R}^3$ car $\mathrm{rg}\mathcal{B} = \mathrm{Card}\,\mathcal{B} = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$.

(b) D'après la question précédente, on obtient $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\mathcal{B} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1) \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2, u_3)$.

Ce qui justifie l'existence d'un tel projecteur.

Plusieurs méthodes sont possibles pour son calcul :

<u>1ère méthode</u> : Décomposer la base canonique :

$e_1 = 2u_1 + u_2$, $e_3 = u_2 - u_3$ et $e_2 = u_1 + e_3 = u_1 + u_2 - u_3$.

Ainsi $q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xq(e_1)+yq(e_2)+zq(e_3) = xq(2u_1+u_2)+yq(u_1+u_2-u_3)+zq(u_2-u_3)$

$= xu_2 + y(u_2-u_3) + z(u_2-u_3) = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$.

<u>2ème méthode</u> : Montrer que la somme est totale. Pour cela, on peut rechercher une équation cartésienne du plan $P = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2, u_3)$. Il est associé au système $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= x \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 &= y \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &= z \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= x \\ 0 &= y+2x \\ -\lambda_2 &= z-2x \end{cases}$. Ainsi $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 2x+y=0 \right\}$.

Pour $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on l'écrit $u = (u - \lambda u_1) + \lambda u_1 \in P \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1)$.

On a $(u - \lambda u_1) = \begin{pmatrix} x \\ y+\lambda \\ z-\lambda \end{pmatrix} \in P$ ssi $2x + y + \lambda = 0$ ssi $\lambda = -2x - y$.

Ainsi $q(u) = u - \lambda u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (2x+y)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$.

3. <u>1ére méthode</u> : On peut faire le calcul dans la base canonique :

$p \circ q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 2x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2x+2x+y+z \\ 2x-2(2x+y+z) \\ -2x+2(2x+y+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -2x-2y-2z \\ 2x+2y+2z \end{pmatrix}$.
$q \circ p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} x+y+z \\ -y-2z \\ y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -2(x+y+z) \\ 2(x+y+z)-y-2z+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -2x-2y-2z \\ 2x+2y+2z \end{pmatrix}$.
2ème méthode : On peut faire le calcul dans la base $\mathcal{B}$:
$p \circ q(u_1) = p(0) = 0, p \circ q(u_2) = p(u_2) = u_2$ et $p \circ q(u_3) = p(u_3) = 0$.
$q \circ p(u_1) = q(u_1) = 0, q \circ p(u_2) = q(u_2) = u_2$ et $q \circ p(u_3) = q(0) = 0$.
On en déduit que $(p \circ q)^2 = p^2 \circ q^2 = p \circ q$ car les applications commutent. Donc $p \circ q$ est un projecteur.

4. Le plus efficace est ici de faire les calculs dans la base $\mathcal{B}$. On a vu dans la question précédente que u_2 est invariant et que u_1, u_3 sont annulés par $p \circ q$. Or $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2) \oplus \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_3)$ car $\mathcal{B}$ est une base. Donc $p \circ q$ est le projecteur sur $\text{Im}(p \circ q) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2)$ le long de $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_3)$.
   L'équation $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker}p \oplus \text{Ker}q$ équivaut à $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_3) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_3) \oplus \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1)$. Ce qui est vrai en séparant suivant la base (u_1, u_3) du sous-espace $\text{Ker}(p \circ q)$.
   L'équation $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}p \cap \text{Im}q$ équivaut à $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2) \cap \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2, u_3)$. Ce qui est vrai par double inclusion.
   $(\subset)$ est toujours vrai.
   $(\supset)$ Si $u = au_1 + bu_2 = \alpha u_2 + \beta u_3$ alors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ donc $a = \beta = 0$. Puis $u = bu_2 \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_2)$.
5. On peut appliquer la formule du Binôme de Newton car les endomorphismes commutent.
   Il nous restera à calculer suivant 3 cas : $p^k \circ q^l = \begin{cases} p & \text{si } l = 0 \\ q & \text{si } k = 0 \\ p \circ q & \text{sinon} \end{cases}$.
   On obtient donc $(p+q)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \circ q^{n-k} = p + c_n p \circ q + q$ en isolant $k = 0$ et $k = n$.
   Avec $\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} = 2^n - 2$.
6. (a) Une première méthode consiste à effectuer les calculs dans la base canonique en trouvant l'expression $s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+2z \\ -3y-4z \\ 2y+3z \end{pmatrix}$.
      La meilleur méthode réalise les calculs dans la base $\mathcal{B}$. s est une endomorphisme par opération.
      On a $s(u_1) = u_1$ car $p(u_1) = u_1$ et $q(u_1) = 0$.
      Puis $s(u_2) = u_2 - u_2 + u_2 = u_2$ car $p(u_2) = u_2 = q(u_2)$.
      Et $s(u_3) = -u_3$ car $p(u_3) = 0$ et $q(u_3) = u_3$.
      Ainsi $s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. On obtient la symétrie par rapport à $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2)$ le long de $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_3)$.
   (b) On a $p \circ s = p \circ (p - q + p \circ q) = p - p \circ q + p \circ q = p$ et $s \circ p = p - q \circ p + p \circ q \circ q = p$ car p et q commutent.
      On vérifie la second relation sur la base $\mathcal{B}$.
      $(q \circ s)(u_1) = q(u_1) = 0$ et $(s \circ q)(u_1) = s(0) = 0$

$(q\circ s)(u_2) = q(u_2) = u_2$ et $(s\circ q)(u_2) = s(u_2) = u_2$
$(q\circ s)(u_3) = q(-u_3) = -u_3$ et $(s\circ q)(u_3) = s(u_3) = -u_3$
Donc $q\circ s = s\circ q$.

Problème II : 1. La suite nulle est bornée. Puis pour (u_n) et (v_n) bornée par M et N et un scalaire $\lambda\in\mathbb{C}$ par l'inégalité triangulaire : $|u_n+\lambda v_n|\leq M+|\lambda|N$ est donc bornée.

2. (a) L'application est bien définie car si $|u_n|\leq M$ alors $|u_{n+1}|\leq M$. Donc $T(u)\in\mathcal{B}$.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $T(u+\lambda v)_n = u_{n+1}+\lambda v_{n+1} = T(u)_n+\lambda T(v)_n$. Donc T est linéaire.
   (b) On a $(u_n)_{n\geq 0}\in\mathrm{Ker}T$ ssi $(u_{n+1})_{n\geq 0} = 0_{\mathcal{B}}$ ssi $u_0\in\mathbb{R}$ et $\forall n\geq 1, u_n = 0$.
On a $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\delta)$ avec $\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.
Le noyau n'est pas trivial donc l'application n'est pas injective.
   (c) Montrons que T est surjective. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite quelconque de $\mathcal{B}$ alors la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_0 = 0$ et $v_n = u_{n-1}$ pour $n\geq 1$ vérifie $T(v) = u$. Donc $\mathrm{Im}T = \mathcal{B}$.

3. (a) L'application est bien définie car si $|u_n|\leq M$ alors $S(u)_0 = 0\leq M$ et $|S(u)_n| = |u_{n-1}|\leq M$ pour $n\geq 1$. Donc $S(u)\in\mathcal{B}$.
L'application est linéaire. D'une part $S(u+\lambda v)_0 = 0 = S(u)_0+\lambda S(v)_0$. D'autre part pour $n\geq 1$, $S(u+\lambda v)_n = u_{n-1}+\lambda v_{n-1} = S(u)_n+\lambda S(v)_n$. Donc $S(u+\lambda v) = S(u)+\lambda S(v)$.
Enfin pour $u\in\mathcal{B}$ et $n\in\mathbb{N}$, $T(S(u))_n = S(u)_{n+1} = u_{(n+1)-1} = u_n$ car $n+1\geq 1$. Donc $T\circ S = Id_{\mathcal{B}}$.
   (b) On peut démontrer que pour deux applications f et g, on a toujours : $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}(g\circ f)$ et $\mathrm{Im}(g\circ f)\subset\mathrm{Im}(g)$. Donc dans notre cas, on a de plus :
$\mathrm{Ker}(T)\subset\mathrm{Ker}(S\circ T)\subset\mathrm{Ker}(T\circ S\circ T) = \mathrm{Ker}T$ d'où l'égalité.
Et de même $\mathrm{Im}S = \mathrm{Im}(S\circ T\circ S)\subset\mathrm{Im}(S\circ T)\subset\mathrm{Im}S$ d'où l'égalité.
   (c) On sait que $T\circ S = Id_{\mathcal{B}}$ alors $(S\circ T)^2 = S\circ(T\circ S)\circ T = S\circ T$ est un projecteur.
Donc $\mathcal{B} = \mathrm{Ker}(T\circ S)\oplus\mathrm{Im}(T\circ S) = \mathrm{Ker}(T)\oplus\mathrm{Im}(S)$.

4. (a) Par équivalences successives, on a : λ est une valeur propre de $T\Leftrightarrow\exists u\in\mathcal{B}, u\neq 0, Tu = \lambda u\Leftrightarrow\exists u\in\mathcal{B}\setminus\{0\}, (T-\lambda id)u = 0$ $\mathrm{Ker}(T-\lambda Id)\neq\{0\}$.
   (b) Les suites vérifiant $T(u) = (1/2)u$ sont celles de $\mathcal{B}$ telles que $u_{n+1} = u_n/2$, c'est-à-dire les suites géométriques de raison $1/2$ qui sont bien bornées.
   (c) Les suites vérifiant $T(u) = 2u$ sont celles de $\mathcal{B}$ telles que $u_{n+1} = 2u_n$, c'est-à-dire les suites géométriques de raison 2 qui sont bornées uniquement si $u_0 = 0$. Seule la suite nulle convient.
   (d) Si $|\lambda|\leq 1$ alors $\mathrm{Ker}(T-\lambda Id_{\mathcal{B}}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}((\lambda^n)_{n\geq 0})$ donc λ est valeur propre de T. Si $|\lambda|>1$ alors $u_n = \lambda^n u_0$ est non bornée sauf si $u_0 = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(T-\lambda Id_{\mathcal{B}}) = \{(0)_{n\geq 0}\}$ et λ n'est pas valeur propre.

5. (a) On sait que $B(n)\sim_{+\infty} a_d n^d <<_{+\infty} 2^n$ avec $d = \deg(B)$. Donc $\dfrac{B(n)}{2^n}\to_{+\infty} 0$ et en particulier la suite est bornée.
L'équation s'écrit $f(u) = b$. C'est une équation vectorielle linéaire.
   (b) Pour $n\in\mathbb{N}$, on calcul $(T(u)-\lambda u)_n = u_{n+1}-\lambda u_n$
$= \sum_{k=0}^{n}\lambda^{n-k}v_k - \lambda\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{n-1-k}v_k = 0+\lambda^0 v_n = v_n$ en isolant $k = n$.

Donc $T(u) = \lambda u + v$.

(c) Soit $v \in \mathcal{B}$. On dispose de $u \in \mathcal{B}$ tel que $v = T(u) - \lambda u = (T - \lambda Id_{\mathcal{B}})(u) \in \mathrm{Im}(T - \lambda Id_{\mathcal{B}})$. Donc $\mathcal{B} \subset \mathrm{Im}(T - \lambda Id_{\mathcal{B}})$ et l'application est surjective.
Détail : On a admis que u est bornée, on peut le montrer avec la majoration $|u_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda|^{n-1-k}|v_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda|^{n-1-k} = M\dfrac{1-|\lambda|^n}{1-|\lambda|} \leq \dfrac{M}{1-|\lambda|}$ lorsque $|\lambda| < 1$.
On peut factoriser $f = 6(T - \frac{1}{2}Id) \circ (T - \frac{1}{3}Id)$.
Puis $\mathrm{Im} f = f(\mathcal{B}) = 6(T - \frac{1}{2}Id)\left((T - \frac{1}{3}Id)(\mathcal{B})\right)$
$= 6(T - \frac{1}{2}Id)(\mathcal{B})$ car $(T - \frac{1}{3}Id)$ est surjective
$= 6\mathcal{B} = \mathcal{B}$ car $(T - \frac{1}{2}Id)$ est surjective.

(d) Notons $E = \ker f, E_1 = \mathrm{Ker}\left(T - \frac{1}{2}Id_{\mathcal{B}}\right)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}\left(T - \frac{1}{3}Id_{\mathcal{B}}\right)$. Ce sont tous les trois des sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$ en tant que noyau.
Il reste à montrer que $E_1 \subset E$ et $E_2 \subset E$.
Soit $u \in E_1$ alors $f(u) = 6(T - \frac{1}{2}Id) \circ (T - \frac{1}{3}Id)(u) = 6(T - \frac{1}{3}Id)\left((T - \frac{1}{2}Id)(u)\right) = 6(T - \frac{1}{3}Id)(0) = 0$. Donc $u \in \mathrm{Ker} f$. De même si $u \in E_2$ alors $f(u) = 0$ par le même calcul. Donc $u \in E$.
Montrons que la somme est directe. Soit $u \in E_1 \cap E_2$. Alors $T(u) = \frac{1}{2}u$ car $u \in E_1$ et $T(u) = \frac{1}{3}u$ car $u \in E_2$. Ainsi $\frac{1}{2}u = \frac{1}{3}u$ montre que $u = 0_{\mathcal{B}}$.
Montrons que la somme est totale. Soit $u \in E$. On note $u_1 = \left(T(u) - \frac{1}{3}u\right)$ et $u_2 = \left(T(u) - \frac{1}{2}u\right)$. On a vu que $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$ dans la première partie de cette question. On remarque que $u_1 - u_2 = \frac{1}{6}u$. Donc $u = 6u_1 - 6u_1 \in E_1 + E_2$.

(e) L'application f est surjective donc l'équation est toujours compatible. Si u_p est une solution particulière alors $\mathcal{S} = u_p + \mathrm{Ker} f$.
Or $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1/2)^n) \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1/3)^n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0}, \left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\geq 0}\right\}$.
On peut également expliciter la solution particulière.
On a $v_n = \sum_{k=0}^{n-1}(1/2)^{n-1-k}b_k$ vérifie $T(v) - (1/2)v = b$.
Puis $w_n = \sum_{l=0}^{n-1}(1/3)^{n-1-l}v_l$ vérifie $T(w) - (1/3)w = v$.
Donc $f(w) = 6(T-(1/2)Id)(T(w)-(1/3)w) = 6(T(v)-(1/2)v) = 6b$. Donc $u_p = \frac{1}{6}w$ convient.

La solution particulière est $\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1-l}(1/3)^{n-1-l}\sum_{k=0}^{l-1}(1/2)^{l-1-k}\frac{B(k)}{2^k}$.

Problème III : d'après CCINP-TPC 2017

1. (a) On a $L_i(a_i)=1$ car le numérateur et dénominateur sont identiques.
   On a $L_i(a_j)=0$ si $i\neq j$ car ce sont des racines du polynômes.

   (b) On a déjà $\mathrm{Card}\,\mathcal{B}=3=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]$.
   Puis si $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\lambda_i L_i(X)=0$ alors en évaluant en a_j, on obtient $\lambda_j=0$. Donc la famille est libre.
   Par caractérisation des bases, $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (c) On écrit $P(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\lambda_i L_i(X)$. En évaluant en a_j, on obtient désormais $P(a_j)=\lambda_j$
   Donc $P=\begin{pmatrix}P(a_1)\\P(a_2)\\P(a_3)\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ sont les coordonnées du polynôme P.
2. On a $f(P+\lambda Q)=...=f(P)+\lambda f(Q)$ est bien $\mathbb{R}$-linéaire.
3. On a $\deg(f(P))\leq\max(\deg P_1,\deg P_2,\deg P_3)=N$. Ainsi $\mathrm{Im}f\subset\mathbb{R}_N[X]$. Les polynômes P_i étant fixés alors le maximum de leurs degrés $N\in\mathbb{N}$ est fixé. Donc X^{N+1} ne peut pas admettre d'antécédent par f. Ainsi f n'est pas surjective.
4. (a) On a $P\in\mathrm{Ker}f$ ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}P(a_i)P_i(X)=0$
   ssi $P(a_1)=P(a_2)=P(a_3)=0$ car la famille est libre
   ssi $\{a_1,a_2,a_3\}\subset Rac(P)$ ssi Q divise P.
   Donc $\mathrm{Ker}f=\{P\in\mathbb{R}[X]$ tel que Q divise $P\}$.

   (b) La famille étant liée, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ non tous nuls tel que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\lambda_i P_i(X)=0$. On introduit $P_0(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\lambda_i L_i(X)$. On sait que $P_0(a_i)=\lambda_i$ d'après ce qui précédent. Ainsi $f(P_0)=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}P_0(a_i)P_i(X)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i P_i(X)=0$.
   Et P_0 n'est pas divisible par Q car au moins une des valeurs $\lambda_i=P_0(a_i)\neq 0$ donc a_i n'est pas racine de P_0.

   (c) Dans les deux cas, le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. Car il contient toujours le polynôme $Q\neq 0$. Donc f n'est jamais injective.
5. (a) Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a vu que $\deg(f(P))\leq\max(\deg P_1,\deg P_2,\deg P_3)\leq n$. Donc $f(P)\in\mathbb{R}_n[X]$ et f est bien définie.
   La linéarité est immédiate.

   (b) ($\subset$) est immédiate par construction de f_n.
   ($\supset$) On sait que $n\geq 3$ donc $L_i\in\mathbb{R}_n[X]$. Or $f_n(L_i)=P_i$. Donc $P_i\in\mathrm{Im}f_n$. Avec la stabilité par CL, on obtient l'inclusion.

(c) Le théorème du rang, montre que $\dim\mathrm{Ker} f_n = \dim\mathbb{R}_n[X] - \mathrm{rg}(f_n) = (n+1) - 3 = n-2$. Dans la question, précédente on a vu que $\mathrm{Ker} f = \{P \in \mathbb{R}[X]$ tel que Q divise $P\}$. Donc $\mathrm{Ker} f_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que Q divise $P\} = \{Q(X)B(X)$ pour $B \in \mathbb{R}_{n-3}[X]\}$
$= \{Q(X) \sum_{k=0}^{n-3} b_k X^k$ pour $a_0, ..., a_{n-3} \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{X^k Q(X)\right\}_{k=0...(n-3)}$.

En posant $Q_k(X) = X^k Q(X)$, on obtient une famille libre (car échelonnée en degré) et génératrice du noyau.

6. On sait que $(P_1, P_2, P_3) = \mathcal{B}_2$ est une famille libre. Donc d'après la question précédente $\mathrm{Im} f_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(L_1, L_2, L_3) = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathrm{Ker} f_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(Q_0, ..., Q_{n-3})$. On a déjà observé que $f_n(L_i) = P_i = L_i$ donc l'image est invariante. Reste à montrer que $R_n[X] = \mathrm{Im} f_n \oplus \mathrm{Ker} f_n$. La famille $(1, X, X^2, Q_0, Q_1, ..., Q_{n-3})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car échelonné en degré et de cardinal $n+1$. Donc $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}_R(1, X, X^2) \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(Q_0, ..., Q_{n-3}) = \mathbb{R}_2[X] \oplus \mathrm{Ker} f_n = \mathrm{Im} f_n \oplus \mathrm{Ker} f_n$.

   Ainsi f_n est le projecteur sur $\mathbb{R}_2[X]$ le long de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(Q_0, ..., Q_{n-3})$.

7. $a_1 = -1, a_2 = 0$ et $a_3 = 1$, $P_1 = X^2 + X + 1, P_2 = X^2 - 2X$ et $P_3 = -3X + 1$.

   (a) Dans la base canonique, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Donc $\mathrm{rg}(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ... = 3$. Donc la famille est libre.

   (b) On a $f_3(1) = P_1 + P_2 + P_3 = 2X^2 - 4X + 2$,
   $f_3(X) = -1P_1 + 0P_2 + 1P_3 = -X^2 - 4X$,
   $f_3(X^2) = (-1)^2 P_1 + 0^2 P_2 + 1^2 P_3 = X^2 - 2X + 2$
   et $f_3(X^3) = (-1)^3 P_1 + 0^3 P_2 + 1^3 P_3 = -X^2 - 4X$.

   (c) On a ici $Q(X) = (X+1)X(X-1) = X^3 - X$. Dans le cas où la famille est libre, on a vu $\mathrm{Ker} f_3 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3 - X)$ est de dimension $n - 2 = 1$.

   (d) On a $\mathrm{Im} f_3 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(P_1, P_2, P_3) \subset \mathbb{R}_2[X]$ par degré. Puis avec la dimension, on obtient $\mathrm{Im} f_3 = \mathbb{R}_2[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$. Or $\mathrm{Ker} f_3$ est une droite non incluse dans $\mathrm{Im} f_3$. Donc ils sont supplémentaires.