Semaine 25 - Du 28 Avril au 2 Mai 2025

Dénombrement

Révision de la semaine 24

Probabilités finies

Espaces probabilisés finies

Vocabulaire spécifique à la théorie des probabilités et lien avec la théorie des ensembles.
Loi de probabilité comme application unitaire et additive. Propriétés élémentaires.
Caractérisation d'une loi par les probabilités des évènements élémentaires.

Probabilités conditionnelles

Définition de la loi de probabilité $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$.
Formule des probabilités composées.
Formule des probabilités totales.
Formule de Bayes.
Évènements 2 à 2 indépendants et famille d'évènements mutuellement indépendants.

Liste de Questions de cours :

a) Démontrer que $\operatorname{Card}(A \uplus B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B)$ pour A et B disjoints.

b) Démontrer la caractérisation des bijections :
$f : A \to B$ bijective ssi deux des trois f injective, f surjective, $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$.

c) Démontrer avec le dénombrement que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

d) Enoncer et démontrer la formule des probabilités composées pour n évènements.

e) Enoncer et démontrer les formules des probabilités totales et de Bayes pour un SCEI.

f) Montrer que l'indépendance mutuellement de n évènements entraîne l'indépendance deux à deux et que la réciproque est fausse.

Exercices d'Application du Cours

1. On pose $\Omega = [\![1, n]\!]^2$. On note $A = \{(i, 1) \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$ et $B = \{(n, j) \text{ pour } 1 \leq j \leq n\}$.
   (a) Déterminer une loi telle que $\mathbb{P}\{(i, j)\} = \alpha ij$ avec α à déterminer.
   (b) Calculer la probabilité de A et de B.
   (c) Les évènements sont-ils indépendants ?
2. On extrait 3 boules sans remise dans une urne qui contient 2 Rouges, 2 Vertes et 2 Bleus. Calculer la probabilité des évènements :
   (a) On a tiré au moins une verte.
   (b) On a tiré une boule de chaque couleur.
   (c) Sachant qu'on a tiré une verte, on a tiré une boule de chaque couleur.
3. On propose une interrogation à des élèves avec trois définitions indépendantes. On sait que si l'élève a travaillé, il a 9 chances sur 10 de répondre correctement à chaque question. Dans le cas contraire, il y a 3 chances sur 10. On note $p \in [0, 1]$ la proportion d'élèves ayant préparé l'interrogation.
   (a) Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 points sachant que l'on a travaillé ?
   (b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 points sachant le contraire ?
   (c) Sur 45 élèves, 30 ont eu au moins 2 points. Quelle est la valeur de p ?
   (d) Quelle est la probabilité qu'un élève ait travaillé, si il y a eu au moins 2 points ?

Devoir libre

1. On considère un jeu de tennis constitués de plusieurs points. Un joueur gagne dès qu'il a deux points d'écart avec son adversaire. On appelle A et B les deux joueurs et on introduit les évènements :
   — $A =$ "le joueur A gagne la partie".
   — $A_k =$ "le joueur A gagne au k-ième point".
   — $B_k =$ "le joueur B gagne au k-ième point".
   — $C_k =$ "la partie continue après k points".
   On suppose que les points sont mutuellement indépendants et que A à une probabilité $p \in]0, 1[$ fixée de gagner un point face à B.
   (a) Déterminer les valeurs de $\mathbb{P}(A_k), \mathbb{P}(B_k)$ et $\mathbb{P}(C_k)$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$.
   (b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}_{C_{2k}}(A_{2k+2}) = \mathbb{P}(A_2)$. En déduire $\mathbb{P}_{C_{2k}}(C_{2k+2})$ et $\mathbb{P}_{C_{2k}}(B_{2k+2})$.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}(C_{2k}) = (2p(1-p))^k$.

   On admet la formule de sommation $\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ pour $q \in]-1, 1[$.

   (a) Calculer $\mathbb{P}(A_{2k})$ et en déduire $\mathbb{P}(A)$.
   (b) On suppose ici $p = 1/2$. Calculer $\mathbb{P}(A)$ et commenter. Au bout de combien de manches peut-on espérer la partie se terminer avec une probabilité supérieur à 99%.
   (c) On suppose ici $p = 3/4$. Trouver $\mathbb{P}(A)$ et le rang d'arrêt avec le même intervalle de confiance. Commenter.