Semaine 27 et 28 - Du 12 au 23 Mai 2025

Questions de cours

1. Enoncer puis démontrer l'inégalité triangulaire : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
2. Enoncer la formule de trigonométrie : $\sin(p) + \sin(q) = ...$ puis démontrer la à l'aide des formules d'Euler et de la technique de l'arc moitié.
3. Calculer la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
4. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 3 - i\sqrt{3}$.
5. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Démontrer que la composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).
7. Montrer que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ en admettant $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
8. Enoncer puis démontrer la formule de la dérivée d'un produit.
9. En tant que bijection réciproque, démontrer que la fonction Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer sa dérivée.
10. Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$. En calculant sa dérivée, montrer que $\text{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.
11. Enoncer puis démontrer la Formule de Leibniz.
12. Enoncer et démontrer la formule d'intégration par parties puis calculer $\int_0^x \text{Arctan}(t)\, \mathrm{d}t$.
13. Enoncer et démontrer la formule de changement de variables puis calculer $\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\, \mathrm{d}t$
14. Enoncer et démontrer le principe de superposition pour l'ordre 1.
15. Enoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL1 à coefficients non constants.
16. Enoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL2 à coefficients constants sur $\mathbb{C}$.
17. Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $A = \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$.
18. Montrer que si A est un convexe majoré sans maximum et minoré avec minimum alors $A = [\min A, \sup A[$.
19. Déterminer une expression explicite de la suite de Fibonacci.
20. Démontrer l'unicité de la limite d'une suite.
21. Démontrer le résultat sur la limite d'un produit de deux suites (cas limites finies).
22. Enoncer puis démontrer le théorème de limite monotone pour les suites.
23. Enoncer et démontrer le résultat de composée des limites.
24. Enoncer puis démontrer le théorème d'encadrement pour les fonctions.
25. Trouver les fonctions f continue en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.
26. Enoncer puis démonter le Théorème des Valeurs Intermédiaires sur un segment $[a, b]$.
27. Equivalence de l'existence de la limite de $f : I \to \mathbb{C}$ et de celles des limites de $\text{Re}f$ et $\text{Im}f$.
28. Enoncer puis démontrer le Théorème de Rolle (sans utiliser le TAF).
29. Enoncer puis démontrer le Théorème des accroissements finies.
30. Enoncer et démontrer le résultat de prolongement de la dérivabilité.
31. Démontrer que pour $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), M^{a+b} = M^a M^b$ et $M^{ab} = (M^a)^b$.
32. Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton pour deux matrices qui commutent.
33. Démontrer la stabilité des matrices triangulaires par les opérations.
34. Calculer les puissances de $A = 2In + B$ avec $B^2 = I_n$.
35. Enoncer et démontrer les formules $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
36. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $X \neq 0$ vérifiant $AX = \lambda X$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
37. Programmer en Python l'algorithme d'Euclide et démontrer sa terminaison et sa validité.
38. Programmer en Python le crible d'Eratosthène et montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

39. Soit $a, n \geq 2$. Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$ et n est premier.
40. Démontrer que $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.
41. Démontrer la règle de Leibniz $(PQ)' = P'Q + PQ'$ avec la définition formelle.
42. Enoncer et démontrer le lien entre l'annulation des dérivées et la multiplicité d'une racine.
43. Enoncer et démontrer la formule de Taylor.
44. Démontrer la croissance comparée $\ln(x) =_{x\to+\infty} o(x^\beta)$ si $\beta > 0$.
45. Démontrer l'unicité du développement limité.
46. Enoncer et démontrer le résultat sur le produit des développements limités.
47. Calculer $\ln^{(k)}(2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ à l'aide de la formule de Taylor-Young.
48. Montrer que les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ forme un $\mathbb{R}$-ev. (2 méthodes)
49. Monter qu'une famille de polynôme échelonné en degré est libre.
50. Montrer que si $\mathcal{B}_1$ est une base de F_1, $\mathcal{B}_2$ est une base de F_2 et $E = F_1 \oplus F_2$ alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.
51. Enoncer et démontrer le Théorème de la base extraite.
52. Enoncer et démontrer la caractérisation des bases à l'aide de la dimension.(Thm 1.5)
53. Enoncer et démontrer les majorations connues sur le rang d'une famille.(Prop 2.2)
54. Enoncer et démontrer la formule de Grassmann.
55. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ est un espace vectoriel et qu'il caractérise l'injectivité de f.
56. Montrer que $p^2 = p$ ssi p est le projecteur sur $\mathrm{Im} p$ le long de $\mathrm{Ker} p$.
57. En étudiant l'application $M \mapsto M^T$, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
58. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui passe par $n+1$ points fixés i.e. $\forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = b_i$ avec $a_0, ..., a_n$ distincts et $b_0, ..., b_n$ quelconques.
59. Pour $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\mathcal{B}_E$ une base de E. Montrer que f est injective ssi $f(\mathcal{B}_E)$ est libre.
60. Enoncer et démontrer le théorème du rang.
61. Démontrer que $\mathrm{Card}\,(A \uplus B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B)$ pour A et B disjoints.
62. Démontrer la caractérisation des bijections :
    $f : A \to B$ bijective ssi deux des trois f injective, f surjective, $\mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, B$.
63. Démontrer avec le dénombrement que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
64. Enoncer et démontrer la formule des probabilités composées pour n évènements.
65. Enoncer et démontrer les formules des probabilités totales et de Bayes pour un SCEI.
66. Montrer que l'indépendance mutuellement de n évènements entraîne l'indépendance deux à deux et que la réciproque est fausse.
67. Montrer que si $X_k \sim \mathcal{B}(p)$ sont mutuellement indépendantes alors $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \sim \mathcal{B}(n, p)$.
68. Définir $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
69. Définir $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
70. Enoncer et démontrer la formule de Koenig-Huygens et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.
71. Enoncer et démontrer l'inégalité de Markov et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Méthode de cours

1. Résoudre une EDL1 à coefficients non constants.
2. Résoudre une EDL2 à coefficients constants.
3. Déterminer l'expression explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
4. Etudier une suite autonome $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$ un intervalle stable.
5. Inverser une matrice à l'aide de l'algorithme du Pivot de Gauss-Jordan.
6. Calculer A^n à l'aide d'un polynôme annulateur $\chi(A) = 0$.
7. Résoudre une équation diophantienne linéaire avec les thm de Bézout et de Gauss.
8. Factoriser un polynôme sur $\mathbb{R}[X]$ à l'aide des racines complexes et de leurs multiplicités.
9. Calculer le développement limité d'une fonction en a à l'ordre n.
10. Calculer un projecteur (ou une symétrie) associé à des espaces-propres donnés $E = E_1 \oplus E_2$.