

TD 16 : Probabilités

16.1 Espaces probabilisés finis

Exo 1 : a) On recherche $c > 0$ tel que $\mathbb{P}_1\{k\} = ck$ est une loi de probabilité sur Ω . Il faut vérifier que la loi est unitaire. Donc $1 = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_1\{k\} = \sum_{k=1}^n ck = c \frac{n(n+1)}{2}$. Donc $c = \frac{2}{n(n+1)}$ est l'unique solution.

b) De même, on recherche $c > 0$ tel que $\mathbb{P}_3\{k\} = ck^3$ soit unitaire. Donc $1 = \sum_{k=1}^n ck^3 = c \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et $c = \frac{4}{n^2(n+1)^2}$ est l'unique solution.

Exo 2 : On a $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ par croissance de la loi.

Donc $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$.

On a $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$.

Donc $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \max(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1, 0)$.

Exo 3 : On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Init. $n = 1$ La formule est $\mathbb{P}(A_1) = (-1)^2 \mathbb{P}(A_1)$.

$n = 2$ La formule est $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = (-1)^2 \mathbb{P}(A_1) + (-1)^2 \mathbb{P}(A_2) + (-1)^3 \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$.

Hérédite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la formule soit acquise.

On note $B = \bigcup_{k=1}^n A_k$. On a $\mathbb{P}(B \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(B \cap A_{n+1})$.

On a $\mathbb{P}(B) = \sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} (-1)^{\text{Card } I+1} \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i)$ par HR.

Puis $\mathbb{P}(B \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1}))$

$= \sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} (-1)^{\text{Card } I+1} \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i \cap A_{n+1})$ par HR

$= - \sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} (-1)^{\text{Card } I+2} \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I \cup \{n+1\}} A_i)$ Ainsi $\mathbb{P}(B)$ permet de sommer sur les parties $J = I$ ne contenant pas $n+1$ et $\mathbb{P}(B \cap A_{n+1})$ permet de sommer sur les parties $J = I \cup \{n+1\}$ contenant $n+1$. On trouve donc toutes les parties $J \subset \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ sauf $\{n+1\}$ qui correspond au terme $\mathbb{P}(A_{n+1})$.

16.2 Modélisation

Exo 4 : On choisit l'univers $\Omega = \llbracket 0, 9 \rrbracket^{10}$ avec les aléas $\omega = (c_1, c_2, \dots, c_{10})$ les différents chiffres du numéros.

On a $\mathbb{P}\{06***\} = \mathbb{P}\{c_1 = 0 \cap c_2 = 6\} = \mathbb{P}\{c_1 = 0\} \mathbb{P}\{c_2 = 6\} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$ par indépendances des chiffres.

On appelle B l'évènement "les chiffres sont distincts. Donc B est l'ensemble des arrangements de 10 chiffres parmi 10 places (le nombre de permutations) $\text{Card } B = 10!$ et $\text{Card } \Omega = 10^{10}$. Donc $\mathbb{P}(B) = \frac{10!}{10^{10}}$.

L'évènement 'contient au moins deux fois' un même chiffre est l'évènement contraire \bar{B} donc $\mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - \frac{10!}{10^{10}}$.

On note P l'évènement 'palindrome'.

Alors $P = \{(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_5, c_4, c_3, c_2, c_1) \text{ pour } 0 \leq c_k \leq 9\}$ est déterminé par les 5 premiers chiffres.

Donc $\text{Card } P = 10^5$ puis $\mathbb{P}(P) = 10^{-5}$.

Exo 5 : On note X_1 le nombre de pile obtenue avec les deux premiers lancers. On a $\mathbb{P}(X_1 = 2) = p^2$, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 2p(1-p)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = (1-p)^2$.

Puis on note X_2 le nombre de nouveau pile obtenu. On a les probabilités conditionnées à la valeur de X_1 :

$\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 0) = 1$ il n'y a pas de lancé

$\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) = p$ et $\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 0) = 1-p$ il y a eu un lancé.

$\mathbb{P}_{X_1=2}(X_2 = 2) = p^2$, $\mathbb{P}_{X_1=2}(X_2 = 1) = 2p(1-p)$ et $\mathbb{P}_{X_1=2}(X_2 = 0) = (1-p)^2$ il y a eu 2 lancers.

16.3 Conditionnement

Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_2 = l) = \sum_{k=0}^2 \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}_{X_1=k}(X_2 = l).$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(X_2 = 2) = p^2 p^2 = p^4, \mathbb{P}(X_2 = 1) = 2p(1-p)p + p^2 \cdot 2p(1-p) = 2p^2(1-p^2)$$

$$\text{et } \mathbb{P}(X_2 = 0) = (1-p)^2 \cdot 1 + 2p(1-p) \cdot (1-p) + p^2(1-p)^2 = (1-p^2)^2.$$

On note alors $S = X_1 + X_2$ le nombre total de piles et $F = (2 - X_1) + (X_1 - X_2) = 2 - X_2$ le nombre de faces.

On résume dans une table le résultat :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(S = k)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)^2$	$(1-p^2)p^2$	$2p^3(1-p)$	p^4
$\mathbb{P}(F = k)$	p^4	$2p^2(1-p^2)$	$(1-p^2)^2$		

Exo 6 : On note M l'évènement 'être malade' et T l'évènement 'avoir un test positif'. On recherche à calculer $\mathbb{P}_T(M)$ et $\mathbb{P}_{\bar{T}}(\bar{M})$.

On note $p = \mathbb{P}(M)$ la proportion de malades dans la population.

$$\text{On a } \mathbb{P}_T(M) = \mathbb{P}_M(T) \frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T)}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\bar{M})\mathbb{P}_{\bar{M}}(T)} = \frac{(99/100)p}{(99/100)p + (1/1000)(1-p)} = \frac{990p}{989p+1}.$$

$$\text{De même } \mathbb{P}_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{\mathbb{P}_{\bar{M}}\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}_{\bar{M}}\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}_M\mathbb{P}(T)} = \frac{999/1000(1-p)}{999/1000(1-p) + 1/100p} = \frac{999(1-p)}{989(1-p)+10}.$$

Pour $p = 1/100$ (taux d'incidence 1000 pour 100000) on trouve 90% et 99%.

Pour $p = 1/500$ (taux d'incidence 200 pour 100000) on trouve 66% et 99.9%.

Pour $p = 1/1000$ (taux d'incidence 100 pour 100000) on trouve 50% et 99.99%.

Exo 7 : On note AA_k, AB_k et BB_k l'évènement être du génotype AA, AB ou BB à la génération k .

Notons $x, 2y$ et z la probabilité d'être de type AA, AB et BB à la 1ère génération. On a $x + 2y + z = 1$.

$$\text{On a } \mathbb{P}(AA_2) = \mathbb{P}(AA_1)^2 + \mathbb{P}(AA_1)\frac{1}{2}\mathbb{P}(AB_1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(AB_1)\mathbb{P}(AA_1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(AB_1)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2.$$

Puis $\mathbb{P}(BB)_2 = (z+y)^2$ par symétrie du problème.

$$\text{Et } \mathbb{P}(AB_2) = 1 - (x+y)^2 - (z+y)^2 = (x+2y+z)^2 - (x+y)^2 - (z+y)^2 = 2y^2 + 2xy + 2zy + 2xz = 2y(y+x+z) + 2xz = 2y(1-y) + 2xz.$$

$$\text{Ainsi } (x, 2y, z) \mapsto ((x+y)^2, 2[y(1-y) + xz], (x+z)^2).$$

On note $X = (x+y)^2, Y = y(1-y) + xz$ et $Z = (x+z)^2$.

$$\text{A la 3ème génération, on trouve } \mathbb{P}(AA_3) = (X+Y)^2 = ((x+y)^2 + y(1-y) + xz)^2 = (x^2 + 2xy + y^2 + y - y^2 + xz)^2 = (x(x+2y+z) + y)^2 = (x+y)^2 = X.$$

De même, on trouve $\mathbb{P}(BB_3) = (z+y)^2 = Z$.

$$\text{Donc } \mathbb{P}(AB_3) = 1 - \mathbb{P}(AA_3) - \mathbb{P}(BB_3) = 1 - X - Z = 2Y.$$

Donc la suite stationne à partir du rang 2 en $(X, 2Y, Z)$.

16.3 Conditionnement

Exo 8 : On note $\Omega = \mathcal{P}_n(\llbracket 1, m+n \rrbracket)$ l'univers où $\omega = \{p_1, \dots, p_n\}$ sont les rangs des boules rouges dans l'ordre du tirages.

On note A_{2k} l'évènement k boules rouges et k boules noires après $2k$ tirages pour la première fois.

Donc un tirage dans A_{2k} est de la forme $RR(\dots)NN$ ou $NN(\dots)RR$ avec (...) étant autant de rouges que de noires.

$$\text{Donc } \text{Card}(A_{2k}) = 2 \text{Card } \mathcal{P}_{k-2}(\llbracket 3, 2k-2 \rrbracket) \text{Card } \mathcal{P}_{n-k}(\llbracket 2k+1, m+n \rrbracket) = 2 \binom{2k-4}{k-2} \binom{m+n-2k}{n-k}.$$

Puis l'évènement recherché est $A = \cup_{k=1}^{\min(n,m)} A_{2k}$.

$$\text{Donc on trouve } \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{\min(n,m)} \mathbb{P}(A_{2k}) = \frac{2}{4} + \sum_{k=2}^{\min(n,m)} \frac{2(2k-4)!(m+n-2k)!}{(k-2)!^2(n-k)!(m-k)!} \frac{n!m!}{(n+m)!}$$

Exo 9 : On note A_k l'évènement "choisir le lot k" et D_1 (resp. D_2) le premier (resp. le second) article est défectueux. On recherche $\mathbb{P}_{D_1}(D_2)$.

16.3 Conditionnement

Or A_1, A_2 et A_3 est un système complet d'événements incompatibles. Donc on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}_{D_1}(D_2) = \sum_{k=1}^3 \mathbb{P}(A_k) \mathbb{P}_{D_1 \cap A_k}(D_2) = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{3} \frac{n_k - 1}{n_k + m_k - 1}.$$

Exo 10 : On note $D : \Omega \rightarrow \llbracket 1, 6 \rrbracket$ la valeur du dé. On a $\mathbb{P}(D = k) = \frac{1}{6}$.

On note A l'événement 'au moins un pile'. Donc \bar{A} est l'événement faire toujours face.

On utilise la formule des probabilités totales sur le système $\{D = k\}_{1 \leq k \leq 6}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \mathbb{P}(\bar{A}) &= \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(D = k) \mathbb{P}_{D=k}(\bar{A}) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{6} \frac{2}{3} \frac{1 - (2/3)^6}{1 - (2/3)} = \frac{1 - (2/3)^6}{3}. \end{aligned}$$

Exo 11 : On peut calculer les probabilités de B_1, N_2 et $B_1 \cap N_2$ sachant U :

On a $\mathbb{P}_U(B_1) = 9/10, \mathbb{P}_U(N_2) = 1/10$ et $\mathbb{P}_U(B_1 \cap N_2) = 9/100$ car il y a remise.

De même $\mathbb{P}_{\bar{U}}(B_1) = 3/10, \mathbb{P}_{\bar{U}}(N_2) = 7/10$ et $\mathbb{P}_{\bar{U}}(B_1 \cap N_2) = 21/100$.

D'après la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_1) &= \mathbb{P}(U) \mathbb{P}_U(B_1) + \mathbb{P}(\bar{U}) \mathbb{P}_{\bar{U}}(B_1) = \frac{1}{6} \frac{9}{10} + \frac{5}{6} \frac{3}{10} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}. \\ \mathbb{P}(N_2) &= \mathbb{P}(U) \mathbb{P}_U(N_2) + \mathbb{P}(\bar{U}) \mathbb{P}_{\bar{U}}(N_2) = \frac{1}{6} \frac{1}{10} + \frac{5}{6} \frac{7}{10} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}. \\ \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) &= \mathbb{P}(U) \mathbb{P}_U(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(\bar{U}) \mathbb{P}_{\bar{U}}(B_1 \cap N_2) = \frac{1}{6} \frac{9}{100} + \frac{5}{6} \frac{21}{100} = \frac{114}{600} = \frac{19}{100}. \end{aligned}$$

Donc les événements ne sont pas indépendants car $\mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}(N_2) = \frac{6}{25} = \frac{24}{100} > \frac{19}{100} = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2)$.

D'après la formule de Bayes, on a $\mathbb{P}_{B_1 \cap N_2}(U) = \mathbb{P}_U(B_1 \cap N_2) \frac{\mathbb{P}(U)}{\mathbb{P}(B_1 \cap N_2)} = \frac{21}{100} \frac{1}{6} \frac{100}{19} = \frac{7}{38} < \frac{1}{2}$.

Donc il est plus probable d'avoir fait le tirage dans V .

Exo 12 : a) On choisit les k boules à placer dans l'urne 1 : C_m^k possibilités.

On choisit un remplissage des $n - 1$ urnes restantes avec les $m - k$ boules $\llbracket 2, n \rrbracket^{m-k}$ avec $(n - 1)^{m-k}$ possibilités.

$$\text{Donc } p_{m,n} = \frac{\binom{m}{k} (n-1)^{m-k}}{n^m}.$$

b) On a $p_{m_i, i} = \frac{m_i(m_i-1)\dots(m_i-k+1)}{k!} \frac{(i-1)^{m_i-k}}{i^{m_i}} \sim_{i \rightarrow +\infty} \frac{m_i^k}{k!} \frac{1}{i^k} \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{m_i-k}$.

$$\text{Or } \frac{m_i^k}{i^k} \rightarrow \lambda^k.$$

$$\text{Et } \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{m_i-k} = \exp((m_i - k) \ln(1 - 1/i)) \underset{i \rightarrow +\infty}{=} \exp((m_i - k)(-1/i + o(1/i))) \rightarrow_{+\infty} \exp(-\lambda).$$

$$\text{Donc } p_{m_i, i} \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

c) Chacune des urnes contient donc 0 ou 1 boule.

On choisit les m urnes qui contiennent chacune des boules ordonnées : il y a A_n^m possibilités.

$$\text{Donc } q_{m,n} = \frac{A_n^m}{n^m}.$$

$$\text{Puis } q_{m,i} = \frac{i(i-1)\dots(i-m+1)}{i^m} \sim_{i \rightarrow +\infty} \frac{i^m}{i^m} = 1 \text{ car } m \text{ est fixé.}$$

d) On a $\ln q_{m_i, i} = \ln \left(\frac{i(i-1)\dots(i-m_i+1)}{i^{m_i}} \right) = \sum_{k=0}^{m_i-1} \ln(i-k) - \ln(i) = \sum_{k=0}^{m_i-1} \ln \left(1 - \frac{k}{i}\right)$

$$\sim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{m_i-1} -\frac{k}{i} = -\frac{(m_i-1)m_i}{2i} \sim -\frac{(\lambda\sqrt{i})^2}{2i} \rightarrow -\lambda^2/2.$$

$$\text{Donc } q_{m_i, i} \rightarrow \exp(-\lambda^2/2).$$

e) Dans notre modèle les jours sont les urnes et les anniversaires des élèves les boules.

On a $n = 365$ (très grand) et on recherche le plus petit m tels que $q_{m,n} \leq (1/2)$. Pour $1/2 = e^{-\lambda^2/2}$ on trouve $\lambda = \sqrt{2 \ln 2}$. Puis $m = \sqrt{n} \lambda \approx 23$. Il faut au moins 23 élèves.

f) Si on fixe la date a posteriori alors le modèle est $p_{m,n}$ avec $k = 1$.

Donc $1/2 = \lambda e^{-\lambda}$ on trouve $\lambda \approx 0.6929$ Puis $m = n \lambda \approx 253$. Il faut au moins 254 élèves.