

TD 17 - Corrigé

17.1 Exercice formel

Exo 1 : On a $X(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$ car l'univers de chacune des indicatrices est $\{0, 1\}$.

$$\text{Puis } \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}((\mathbb{1}_A = 1) \cap (\mathbb{1}_B = 1) \cap (\mathbb{1}_C = 1)) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4.$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}((\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_C) \in \{(0, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 1, 0)\}) \\ &= \mathbb{P}(\bar{A} \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B} \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap \bar{C}) \text{ car ils sont deux à deux disjoints} \\ &= (\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) + (\mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) + (\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) \\ &= (1/3 - 1/4) + (1/4 - 1/4) + (1/3 - 1/4) = 1/6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis } \mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}((\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_C) \in \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}) \\ &= \mathbb{P}(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \\ &= (\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) + (\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) + \\ &\quad (\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) \\ &= (1/2 - 1/3 - 1/4 + 1/4) + (5/12 - 1/3 - 1/3 + 1/4) + (5/12 - 1/3 - 1/4 + 1/4) = 1/4. \end{aligned}$$

$$\text{Enfin } \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X \neq 0) = 1 - 1/4 - 1/6 - 1/4 = 1/3.$$

Donc la loi de variable aléatoires est donnée par :

$X(\Omega)$	0	1	2	3
$\mathbb{P}_X$	1/3	1/4	1/6	1/4

Exo 2 : On a $Y(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\text{Puis } \mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}((\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = (0, 1)) = \overbrace{\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)}^{A \text{ et } B \text{ indépendants}} = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B) = (1 - p)p.$$

$$\text{De même } \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}((\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = (1, 0)) = \overbrace{\mathbb{P}(A \cap \bar{B})}^{A \text{ et } B \text{ indépendants}} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B}) = p(1 - p).$$

$$\text{Enfin } \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y \neq 0) = 1 - 2p(1 - p) = p^2 + (1 - p)^2.$$

Par indépendance de A et B , on a $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)\mathbb{E}(\mathbb{1}_B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = p^2$. Ainsi Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p^2 (son espérance).

Puis $\mathbb{P}(Z = 0) = 1 - p^2$ et $\mathbb{P}(Z = 1) = p^2$.

$$\begin{aligned} \text{Exo 3 : a)} \quad \text{On recherche } 1 &= \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}_X\{k\} = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n ak(n + 1 - k) \\ &= a(n + 1) \sum_{k=1}^n k - a \sum_{k=1}^n k^2 = a(n + 1) \frac{n(n+1)}{2} - a \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{an(n+1)}{6} [3(n + 1) - (2n + 1)] = a \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = a \binom{n+2}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc on pose } a = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

b) L'indication de symétrie consiste à utiliser :

$$\mathbb{P}(X = n + 1 - k) = a(n + 1 - k)[n + 1 - (n + 1 - k)] = \mathbb{P}(X = k).$$

Donc $Y = n + 1 - X$ est une variable aléatoire qui suit la même loi que X car

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n + 1 - k) = \mathbb{P}(X = k).$$

Ainsi $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(n + 1 - X) = n + 1 - \mathbb{E}(X)$ par linéarité.

On en déduit en résolvant cette dernière équation $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.

Remarque : La question peut être faite sans utiliser l'indication de manière plus calculatoire :

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^n ak(n + 1 - k).k = a(n + 1) \sum_{k=1}^n k^2 - a \sum_{k=1}^n k^3 \\ &= a(n + 1) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - a \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \dots = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

c) D'après le Théorème de transfert, on a :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^n ak(n+1-k) \cdot \frac{1}{k} = a \sum_{k=1}^n (n+1-k) = a \sum_{l=1}^n l \text{ par changement d'indices } l = n+1-k \text{ Puis } \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = a \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3}{n+2}.$$

Exo 4 : a) On calcul $\mathbb{P}(X = k+1)/\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{k!(n-k)!p}{(k+1)!(n-k-1)!(1-p)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}.$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(X = k) \leq \mathbb{P}(X = k+1) \Leftrightarrow (k+1)(1-p) \leq (n-k)p \Leftrightarrow k+1 \leq (n+1)p.$$

Ainsi pour la partie entière supérieure $K_0 = \lceil (n+1)p \rceil$. On a $\mathbb{P}(X = K_0 - 1) \leq \mathbb{P}(X = K_0) \geq \mathbb{P}(X = K_0 + 1)$ et $(X = K_0)$ est l'évènement élémentaire le plus probable.

b) D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{1}{k+1}$
 $= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!(k+1)} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \frac{1}{(n+1)p} p^{k+1} (1-p)^{n-k} = \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k} = \frac{1}{(n+1)p} ((p+1-p)^{n+1} - \binom{n+1}{0} p^0 (1-p)^{n+1}) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$

c) D'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(3^X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1/2)^k (1/2)^{n-k} 3^k = 2^{-n} (3+1)^n = 2^n.$$

Exo 5 : a) D'après le cours on a $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$

Thm de transfert

$$\text{Puis } \mathbb{E}(X^3) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) k^3 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4n} = \frac{n(n+1)^2}{4}.$$

$$\text{Et } \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(1 + X^2) = 1 + \mathbb{E}(X^2) = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{2n^2+3n+7}{6}.$$

b) On a $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}[XY - \mathbb{E}(Y)X - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)]$
 $= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ par linéarité de l'espérance.
 $= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X + X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{n+1}{2} + \frac{n(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)(2n^2+3n+7)}{12}$
 $= \frac{n+1}{12} [6 + 3(n^2 + 2n + 1) - (2n^2 + 3n + 7)] = \frac{(n+1)(n^2+3n+2)}{12} = \frac{(n+1)^2(n+2)}{12}.$

$$\begin{aligned} \text{Puis } \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{V}(X^2 + 1) = \mathbb{V}(X^2) = \mathbb{E}(X^4) - \mathbb{E}(X^2)^2 \\ &= \frac{1}{n} (n^5/5 + n^4/2 + n^3/3 - n/30) - ((n+1)(2n+1)/6)^2 \\ &= (n^4/5 + n^3/2 + n^2/3 - 1/30) - (n^4/9 + n^3/3 + 13n^2/36 + n/6 + 1/36) \\ &= 4n^4/45 + n^3/6 - n^2/36 - n/6 + 1/180. \end{aligned}$$

c) On a $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = Cov(X, Y) = \frac{(n+1)^2(n+2)}{12} \neq 0$. Or si les variables étaient indépendantes $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et $Cov(X, Y) = 0$.

17.2 Modélisation

Exo 6 : a) Méthode dénombrement :

On note $\Omega = \mathcal{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)$ l'univers de l'expérience. En effet pour un aléa $\omega = \{b_1, b_2\}$ avec $b_1 \neq b_2$, on a $X(\omega) = \max(b_1, b_2)$.

Puis : $(X \leq k) = \{\{b_1, b_2\} \in \Omega \text{ tel que } \max(b_1, b_2) \leq k\} = \mathcal{P}_2(\llbracket 1, k \rrbracket).$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(X \leq k) = \frac{\text{Card}(X \leq k)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

Méthode conditionnement :

On note B_1 la première est inférieur à k et B_2 la seconde est inférieure à k .

On a $(X \leq k) = B_1 \cap B_2$ et d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} \text{ d'après l'équipartition sur un tirage simple.}$$

b) Pour $k \in X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X < k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1)$
 $= \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$

Exo 7 : On note $\Omega = \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ avec $\omega = \{r_1, \dots, r_k\}$ l'ensemble des rangs où l'on tire une boule

blanche.

La variable $X(\omega) = \max(r_1, \dots, r_k)$ est le plus grand de ces rangs.

Pour $\alpha \in X(\omega) = \llbracket k, n \rrbracket$, on a $(X \leq \alpha) = \{\omega = \{r_1, \dots, r_k\} \text{ avec } r_i \leq \alpha\} = \mathcal{P}_k(\llbracket 1, \alpha \rrbracket)$.

Donc $\mathbb{P}(X \leq \alpha) = \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{n}{k}}$.

Puis $\mathbb{P}(X = \alpha) = \mathbb{P}(X \leq \alpha) - \mathbb{P}(X \leq \alpha - 1) = \frac{\binom{\alpha}{k} - \binom{\alpha-1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{\alpha-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(\alpha-1)!(n-k)!k}{n!(\alpha-k)!}$.

On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{\alpha \in X(\omega)} \mathbb{P}(X = \alpha) \alpha = \sum_{\alpha=k}^n \frac{(\alpha-1)!(n-k)!k}{n!(\alpha-k)!} \alpha$
dépend de α ne dépend pas de α
 $= \sum_{\alpha=k}^n \frac{\overbrace{\alpha!}^{(n-k)!k}}{(\alpha-k)!} \frac{(n-k)!k}{n!} = \frac{\overbrace{(n-k)!k!k}^{(n-k)!k!k}}{n!} \sum_{\alpha=k}^n \binom{\alpha}{k} = \frac{k}{\binom{n}{k}} \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)k}{k+1}$.

On a utilisé la formule de la somme d'une colonne du triangle de Pascal :

$$\sum_{\alpha=k}^n \binom{\alpha}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Elle se démontre par récurrence sur $n \geq k$.

Exo 8 : Il y a n tirages avec remises donc $n-1$ changements possibles mutuellement indépendants.

Chaque changement à $p = 2/3$ de réussite et $1-p = 1/3$ d'échouer (retirer la même boule sur les trois).

Donc X compte le nombre de succès sur les $n-1$ changements possibles : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, 2/3)$.

Ainsi $X(\Omega) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n-1}{k} (2/3)^k (1/3)^{n-1-k} = \binom{n-1}{k} 2^k / 3^{n-1}$.

Puis $\mathbb{E}(X) = (n-1)(2/3) = \frac{2(n-1)}{3}$ et $\mathbb{V}(X) = (n-1)(2/3)(1/3) = \frac{2(n-1)}{9}$.

Exo 9 : a) On note X_A et X_B le nombre de piles de chaque joueur. Les variables aléatoire X_A et X_B sont indépendantes et suivent une même loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$ car on peut supposer les pièces équilibrées.

On recherche $\mathbb{P}(X_A = X_B) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_A = k) \mathbb{P}_{(X_A=k)}(X_B = k)$ d'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements incompatibles $\{(X_A = k)\}_{0 \leq k \leq n}$.

$= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_A = k) \mathbb{P}(X_B = k)$ par indépendance.

$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1/2)^k (1/2)^{n-k} \binom{n}{k} (1/2)^k (1/2)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 2^{-2n}$

$= 2^{-2n} \binom{2n}{n}$.

b) On note $Y = X_A - X_B$ l'écart algébrique du nombre de piles.

On a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_A) - \mathbb{E}(X_B) = 0$ par linéarité et car X_A et X_B suivent la même loi.

Puis $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_A) + \mathbb{V}(-X_B) = \mathbb{V}(X_A) + \mathbb{V}(X_B) = 2n(1/2)(1-1/2) = n/2$ d'après le théorème de Pythagore en utilisant l'indépendance des deux variables.

Exo 10 : a) La règle de l'énoncé fournit $X(\Omega) = \llbracket 1, 16 \rrbracket$ et $\mathbb{P}(X = k) = 2\mathbb{P}(X = k+1)$.

Donc la suite des probabilités suit une progression géométrique de raison $1/2$ et $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 1)2^{-k+1}$ pour tout $1 \leq k \leq 16$.

Puis la condition unitaire donne $1 = \sum_{k=1}^{16} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = 1)2^{-k+1} = \mathbb{P}(X = 1) \frac{1-(1/2)^{16}}{1-(1/2)}$.

Ainsi $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1/2}{1-(1/2)^{16}} = \frac{2^{15}}{2^{16}-1}$ et $\mathbb{P}(X = k) = \frac{2^{16-k}}{2^{16}-1}$.

b) On considère le polynôme $P(t) = \sum_{k=1}^{16} \mathbb{P}(X = k)t^k$, on a $P(1) = 1$, $P'(1) = \mathbb{E}(X)$ et $P''(1) = \sum_{k=0}^{16} \mathbb{P}(X = k)k(k-1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$.

Puis l'expression de la loi donne : $P(t) = \sum_{k=1}^{16} \frac{2^{16-k}t^k}{2^{16}-1} = \frac{2^{16}}{2^{16}-1} \sum_{k=1}^{16} (t/2)^k$
 $= \frac{2^{16}}{2^{16}-1} (t/2) \frac{1-(t/2)^{16}}{1-(t/2)} = \frac{(2^{16}-t^{16})t}{(2^{16}-1)(2-t)}$.

On peut utiliser la formule de Taylor-Young pour trouver :

$$P(1+h) =_{h \rightarrow 0} P(1) + P'(1)h + P''(1)\frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

$$\begin{aligned} \text{On a ainsi } P(1+h) &= \frac{(2^{16} - (1+h)^{16})(1+h)}{(2^{16}-1)(1-h)} \\ &=_{h \rightarrow 0} \frac{2^{16}-1-16h-\binom{16}{2}h^2+o(h^2)}{2^{16}-1} (1+h)(1+h+h^2+o(h^2)) \\ &=_{h \rightarrow 0} \frac{(2^{16}-1)-16h-136h^2+o(h^2)}{2^{16}-1} (1+2h+2h^2+o(h^2)) =_{h \rightarrow 0} \frac{(2^{16}-1)+(2^{17}-18)h+(2^{17}-170)h^2+o(h^2)}{2^{16}-1}. \end{aligned}$$

Puis par unicité du DL, on a $P(1) = \frac{2^{16}-1}{2^{16}-1} = 1$, $P'(1) = \frac{2^{17}-18}{2^{16}-1}$ et $P''(1) = 2\frac{2^{17}-170}{2^{16}-1}$.

Ainsi $\mathbb{E}(X) = \frac{2^{17}-18}{2^{16}-1}$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = P''(1) + P'(1) - P'(1)^2 = \frac{2^{33}-292 \cdot 2^{16}+34}{(2^{16}-1)^2}$.

Exo 11 : On suppose par l'absurde qu'il existe D_1, D_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ tels que $S = D_1 + D_2$ suit une loi uniforme sur $\llbracket 2, 12 \rrbracket$.

On note $P_1(t) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(D_1 = k)t^k$, $P_2(t) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(D_2 = k)t^k$ des polynômes à coefficients dans $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} \text{On a } P_1(t)P_2(t) &= \sum_{k_1=1}^6 \sum_{k_2=1}^6 \mathbb{P}(D_1 = k_1)\mathbb{P}(D_2 = k_2)t^{k_1+k_2} = \sum_{s=2}^{12} \mathbb{P}(S = s)t^s \\ &= \sum_{s=2}^{12} \frac{1}{11}t^s = \frac{t^2}{11} \frac{t^{11}-1}{t-1} = \frac{t^2}{11} \prod_{\omega \in \mathbb{U}_{11} - \{1\}} (X - \omega). \end{aligned}$$

Donc les racines de P_1 sont parmi celles de $P_1 \times P_2$ c-à-d 0 et $\{\exp(2ik\pi/11)$ pour $1 \leq k \leq 10\}$.

On a 0 est racine simple et donc il y a 5 autres racines complexes par degré. Ceci est absurde car le polynôme est à coefficients réels donc les racines complexes sont comptées par paires avec leurs conjugués.

Exo 12 : a) Les variables X et Y sont indépendantes et suivent des loi uniformes.

$$\text{On a : } \mathbb{P}(X > U) = \mathbb{P}(X > \sup(X, Y)) = 0$$

Puis on considère $1 \leq x \leq m \leq 3$ et on calcul $\mathbb{P}((X, U) = (x, m))$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X, U) = (1, 1)) &= \mathbb{P}((X, Y) = (1, 1)) = \frac{1}{9}. \\ \mathbb{P}((X, U) = (1, 2)) &= \mathbb{P}((X, Y) = (1, 2)) = \frac{1}{9}. \\ \mathbb{P}((X, U) = (1, 3)) &= \mathbb{P}((X, Y) = (1, 3)) = \frac{1}{9}. \\ \mathbb{P}((X, U) = (2, 2)) &= \mathbb{P}((X, Y) \in \{(2, 1); (2, 2)\}) = \frac{2}{9}. \\ \mathbb{P}((X, U) = (2, 3)) &= \mathbb{P}((X, Y) = (2, 3)) = \frac{1}{9}. \\ \mathbb{P}((X, U) = (3, 3)) &= \mathbb{P}((X, Y) \in \{(3, 1); (3, 2); (3, 3)\}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b) On retrouve bien $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, 2, 3\})$.

$$\begin{aligned} \text{Et } \mathbb{P}(U = 1) &= \mathbb{P}((X, U) = (1, 1)) = \frac{1}{9}, \\ \mathbb{P}(U = 2) &= \mathbb{P}((X, U) = (1, 2)) + \mathbb{P}((X, U) = (2, 2)) = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{P}(U = 3) &= \mathbb{P}((X, U) = (1, 3)) + \mathbb{P}((X, U) = (2, 3)) + \mathbb{P}((X, U) = (3, 3)) = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

c) D'après le cours, on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1+3}{2} = 2$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{3^2-1}{12} = \frac{2}{3}$.

$$\text{Puis } \mathbb{E}(U) = 1\mathbb{P}(U = 1) + 2\mathbb{P}(U = 2) + 3\mathbb{P}(U = 3) = \frac{22}{9}.$$

$$\text{Et } \mathbb{E}(U^2) = 1^2\mathbb{P}(U = 1) + 2^2\mathbb{P}(U = 2) + 3^2\mathbb{P}(U = 3) = \frac{58}{9}.$$

$$\text{Donc d'après la formule de Koëning-Huygens } \mathbb{V}(U) = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2 = \frac{38}{81}.$$

Exo 13 : On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, l'événement $X \geq k$ signifie que les k premiers lancers sont des faces. Donc $\mathbb{P}(X \geq k) = q^k$.

Puis $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1) = q^k - q^{k+1} = (1-q)q^k = pq^k$ est la loi de X .

Remarque : La loi de X est bien unitaire car $\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} qp^k$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n qp^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} q \frac{1-p^{n+1}}{1-p} = \frac{q}{1-p} = 1.$$

L'espérance est donnée par $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)k$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k)k = \sum_{k=0}^n [\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)]k$$

$$= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X \geq k)k - \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X \geq k+1)k$$

$$= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X \geq k)k - \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X \geq k)(k-1) \text{ avec le changement d'inconnue } k \rightarrow k-1$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)[k - (k-1)] - \mathbb{P}(X \geq n+1)n = (\sum_{k=1}^n q^k) - nq^{n+1}$$

$$= \frac{q(1-q^n)}{1-q} - nq^{n+1} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \frac{q}{1-q} = \frac{q}{p}.$$

Exo 14 : a) Si $X_n = l$ alors X_{n+1} est $l + 1$ ou $l - 1$ suivant si l'on retire ou ajoute une boule. La probabilité de retirer est $l/6$ du choix de l'une des boules de l'urne.

Donc $\mathbb{P}_{X_n=l}(X_{n+1} = l - 1) = \frac{l}{6}$ et $\mathbb{P}_{X_n=l}(X_{n+1} = l + 1) = \frac{6-l}{6}$.

b) On a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^6 \mathbb{P}(X_{n+1} = k)k = \sum_{k=0}^6 \sum_{l=0}^6 \mathbb{P}(X_n = l) \mathbb{P}_{X_n=l}(X_{n+1} = k)k$ d'après FPT.

$= \sum_{l=0}^6 \mathbb{P}(X_n = l) \left(\frac{l}{6}(l-1) + \frac{6-l}{6}(l+1) \right)$ d'après la question a)

$= \sum_{l=0}^6 \mathbb{P}(X_n = l)(2l/3 + 1) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + 1$ par thm de transfert.

c) On a $\mathbb{E}(X_0) = 3$ et la relation de récurrence $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + 1$. Le point fixe de la suite arithmético-géométrique est 3. Donc pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(X_n) = 3$.

Exo 15 : a) La variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de n expériences et de succès p . Donc $\mathbb{E}(X_n) = np$ et $\mathbb{V}(X_n) = np(1-p)$.

b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbb{P}(|X_n - np| \geq \alpha) \leq \frac{np(1-p)}{\alpha^2}$.

L'évènement $|X_n - np| \geq \alpha$ est le contraire de $\left| \frac{X_n}{n} - p \right| < \frac{\alpha}{n}$.

Posons $\varepsilon = \frac{\alpha}{n}$. On obtient $\mathbb{P}\left(\left| \frac{X_n}{n} - p \right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

En effet : $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{p+(1-p)}{2} = \frac{1}{2}$ d'après l'inégalité des moyennes. Donc $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

c) On souhaite $\frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq \frac{5}{100}$ et $\varepsilon \leq 10^{-2}$.

Donc on prend $\varepsilon = 10^{-2}$ et $n = \frac{100}{5.4.(10^{-2})^2} = 50000$.

Exo 16 : On appelle A et B les étables. Et on note X le nombre de vaches qui choisissent l'étable A . On recherche la valeur $c \in \mathbb{N}$ tels que $X \leq c$ et $100 - X \leq c$ avec une probabilité supérieur à 95%.

La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathbb{B}(100, 1/2)$ d'espérance $\mathbb{E}(X) = 50$ et de variance $\mathbb{V}(X) = 25$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\mathbb{P}(|X - 50| \geq \varepsilon) \leq \frac{25}{\varepsilon^2}$.

On trouve une erreur de 5% en résolvant $\frac{25}{\varepsilon^2} = \frac{5}{100}$ donc $\varepsilon = 10\sqrt{5}$.

Puis $|X - 50| < 10\sqrt{5}$ ssi $X \in]50 - 10\sqrt{5}, 50 + 10\sqrt{5}[\subset [27, 73]$.

Donc il faut construire deux étables de 73 places.