Utilisation du Lemme des tiroirs

On considère 51 entiers distincts compris entre 1 et 100.

1. Montrer qu'il y a deux entiers consécutifs parmi eux.
2. Montrer qu'il y a deux entiers dont la somme vaut 101.

On sait que $n+1$ objets sont rangés dans $np+1$ tiroirs alors au moins un des tiroirs contient $p+1$ objets. Il s'agit de regroupés les entiers afin que deux d'entre eux soit ensemble.

1. On considère l'ensemble des paires $\{2k-1, 2k\}$ pour $1 \leq k \leq 50$. Cela crée une partition de $[\![1, 100]\!] = \biguplus_{k=1}^{50} \{2k-1, 2k\}$ en 50 parties. Donc deux des entiers sont dans une de ces parties et ils sont en particulier consécutifs.
2. On considère l'ensemble des paires $\{k, 101-k\}$ pour $1 \leq k \leq 50$. Cela crée une partition de $[\![1, 100]\!] = \biguplus_{k=1}^{50} \{k, 101-k\}$ en 50 parties. Donc deux des entiers sont dans une de ces parties et leur somme vaut 101 car ils sont distincts.

Dénombrement par récurrence

On recherche calculer u_n le nombre de façon de paver une allée de n mètres de long avec des carreaux de $1m$ et $2m$ (et d'une largeur identique).
Par exemple $4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2$. Donc $u_4 = 5$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Déterminer une relation de récurrence et la démontrer.
3. En déduire la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On a $u_1 = 1$ car 1 est sa seule décomposition.
   Puis $u_2 = 2$ car $2 = 1+1$ sont les deux décompositions.
   Pour $n = 3$, on a $3 = 2+1 = 1+2 = 1+1+1$ donc $u_3 = 3$.

2. On recherche à partitionner en deux les possibilités pour trouver une formule de récurrence.

   Si on dispose d'une décomposition $n = d_1 + d_2 + ... + d_p$, alors on peut traiter deux cas suivant d_1.
   1er cas : $d_1 = 1$ alors $n-1 = d_2 + ... + d_p$ il y a donc u_{n-1} décompositions.
   2eme cas : $d_1 = 2$ alors $n-2 = d_2 + ... + d_p$ il y a donc u_{n-2} décompositions.
   Donc $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

3. On applique la méthode de calcul des SRL2

   La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une SRL2. Son polynôme caractéristique est $X^2 - X - 1$ dont les racines sont $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   Ainsi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
   Puis les conditions initiales, $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$. Montre que $\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
   On retrouve ainsi la suite de Fibonacci $u_n = F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.