

Commutant d'une matrice

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on considère $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Calculer $\text{Im} f$ et en déduire le rang de l'application.
3. Montrer que la famille (I_2, A, A^2) est liée mais que (I_2, A) est libre.
4. En déduire que (I_2, A) est une base de $\text{Ker} f$.
5. Montrer que B commute avec A ssi il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = P(A)$.

1. L'application est bien définie car l'ensemble des matrices carrées $(2, 2)$ est stable par opérations.

On a $f(M_1 + \lambda M_2) = A(M_1 + \lambda M_2) - (M_1 + \lambda M_2)A = AM_1 - M_1A + \lambda(AM_2 - M_2A) = f(M_1) + \lambda f(M_2)$. Donc f est bien un endomorphisme.

2.  En dimension finie, $\text{Im} f = \text{Vect } f(\mathcal{B}_E)$ avec $\mathcal{B}_E$ une base de l'espace de départ.

$$\begin{aligned} \text{On a } \text{Im} f &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \\ \text{car } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \\ \text{Ainsi } \text{rg} f &= \dim \text{Im} f = 2. \end{aligned}$$

3. On calcul $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 3A - I_2$. Ainsi la famille (I_2, A, A^2) est liée.
Puis I_2 et A sont non colinéaires. Donc la famille (I_2, A) est libre.

4.  En dimension finie, le théorème du rang donne $\dim \text{Ker} f = \dim E - \text{rg} f$.

On a $f(I_2) = A - A = 0$ et $f(A) = A^2 - A^2 = 0$ donc $\text{Vect}(I_2, A) \subset \text{Ker} f$.

Or d'après le théorème du rang $\dim \text{Ker} f = 2$. Donc par dimension $\text{Ker} f = \text{Vect}(I_2, A)$.
La famille (I_2, A) est libre donc il s'agit d'une base de $\text{Ker} f$.

5. On a $BA = AB$ ssi $f(B) = 0$ ssi $B \in \text{Ker} f$ ssi $\exists a, b \in \mathbb{R}, B = aI_2 + bA$.

Ceci démontre que si B commute avec A alors il existe un polynôme $P(X) = bX + a$ tel que $B = P(A)$.

La réciproque fait partie du cours sur les matrices. Si $B = P(A)$ alors B commute avec A .

Noyau et Image d'une composée.

Soit f, g, h trois endomorphismes de E vérifiant
$$\begin{cases} g \circ f &= h \\ f \circ h &= g \\ h \circ g &= f \end{cases}$$

Montrer que $\text{Ker} f = \text{Ker} g = \text{Ker} h$ et que $\text{Im} f = \text{Im} g = \text{Im} h$.



On dispose des inclusions classiques sur les noyau et image d'une composée.

$$\boxed{\text{Ker} f \subset \text{Ker}(g \circ f)} \text{ et } \boxed{\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im} g}$$

En effet, si $x \in \text{Ker} f$ alors $f(x) = 0$ puis $g(f(x)) = g(0) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(g \circ f)$.

Si $y \in \text{Im}(g \circ f)$ alors $y = g(f(x)) \in \text{Im} g$.

Ainsi $\text{Ker} f \subset \text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker} h \subset \text{Ker} g \subset \text{Ker} f$. Donc les trois sont égaux.

Et de manière analogue, $\text{Im} f = \text{Im}(h \circ g) \subset \text{Im} h \subset \text{Im} g \subset \text{Im} f$. Donc les trois sont égaux.

Linéarité non immédiate

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire surjective
et $g : F \rightarrow G$ une application telle que $g \circ f$ est linéaire.
Montrer que g est linéaire.

Soit $v_1, v_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On cherche à calculer $g(v_1 + \lambda v_2)$.

On commence par utiliser la surjectivité de f pour trouver $u_1, u_2 \in E$ tels que $f(u_k) = v_k$.

$$\begin{aligned} g(v_1 + \lambda v_2) &= g(f(u_1) + \lambda f(u_2)) = g(f(u_1 + \lambda u_2)) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= (g \circ f)(u_1) + \lambda (g \circ f)(u_2) \text{ car } (g \circ f) \text{ est linéaire} \\ &= g(f(u_1)) + \lambda g(f(u_2)) = g(v_1) + \lambda g(v_2). \end{aligned}$$

Ainsi g est bien linéaire.