Loi géométrique

On considère un jeu de tennis constitués de plusieurs points. Un joueur gagne dès qu'il a deux points d'écart avec son adversaire. On appelle A et B les deux joueurs et on introduit les évènements :

— $A =$ "le joueur A gagne la partie".
— $A_k =$ "le joueur A gagne au k-ième point".
— $B_k =$ "le joueur B gagne au k-ième point".
— $C_k =$ "la partie continue après k points".

On suppose que les points sont mutuellement indépendants et que A à une probabilité $p \in]0,1[$ fixée de gagner un point face à B.

1. Déterminer les valeurs de $\mathbb{P}(A_k), \mathbb{P}(B_k)$ et $\mathbb{P}(C_k)$ pour $k \in \{1,2,3\}$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}_{C_{2k}}(A_{2k+2}) = \mathbb{P}(A_2)$. En déduire $\mathbb{P}_{C_{2k}}(C_{2k+2})$ et $\mathbb{P}_{C_{2k}}(B_{2k+2})$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(C_{2k}) = (2p(1-p))^k$.
   On admet la formule de sommation $\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ pour $q \in]-1,1[$.
4. Calculer $\mathbb{P}(A_{2k})$ et en déduire $\mathbb{P}(A)$.
5. On suppose ici $p = 1/2$. Calculer $\mathbb{P}(A)$ et commenter. Au bout de combien de manches peut-on espérer la partie se terminer avec une probabilité supérieur à 99%.
6. On suppose ici $p = 3/4$. Trouver $\mathbb{P}(A)$ et le rang d'arrêt avec le même intervalle de confiance. Commenter.

1. On remarque que pour avoir deux points d'écarts le score sera de la forme $(k, k+2)$ ou $(k+2, k)$. Donc il faut avoir joué $2k+2$ points au total.
   Ainsi au bout d'un point, on a $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(B_1) = 0$ et $\mathbb{P}(C_1) = 1$.
   Pour gagner, au bout de 2 points, on a $\mathbb{P}(A_2) = p^2$ et $\mathbb{P}(B_2) = q^2$ donc $\mathbb{P}(C_2) = 2pq$.
   Au bout de trois points, on a $\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(B_3) = 0$ et $\mathbb{P}(C_3) = \mathbb{P}(C_2) = 2pq$.
2. Si la partie a continuer au bout de $2k$ points alors le score était de (k,k) sinon la partie se serait arrêtée. Donc ceci revient à dire $(0,0)$ et on en déduit que la probabilité de gagner deux points après est $\mathbb{P}_{C_{2k}}(A_{2k+2}) = \mathbb{P}(A_2)$.
   Le même raisonnement de jeu sans mémoire (retour au point de départ) montre que $\mathbb{P}_{C_{2k}}(B_{2k+2}) = \mathbb{P}(B_2)$ et $\mathbb{P}_{C_{2k}}(C_{2k+2}) = \mathbb{P}(C_2)$.
3. On remarque les inclusions $\Omega = C_0 \supset C_2 \supset C_4 \supset ... \supset C_{2k}$.
   Ainsi $\mathbb{P}(C_{2k}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k C_{2i}\right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}_{C_{2i-2}}(C_{2i})$ d'après la FPC
   $= \prod_{i=1}^k (2pq) = (2pq)^k$.
4. On a $\mathbb{P}(A_{2k}) = \mathbb{P}(C_{2k-2} \cap A_{2k}) = \mathbb{P}(C_{2k-2})\mathbb{P}_{C_{2k-2}}(A_{2k})$ d'après la FPC
   $= (2pq)^{k-1}p^2$
   Puis on a $A = \biguplus_{k=1}^{+\infty} A_{2k}$ donc par additivité de la loi
   $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} (2pq)^{k-1}p^2 = \frac{1}{2pq}\frac{2pq}{1-2pq}p^2 = \frac{p^2}{p^2+q^2}$ car $1 - 2pq = p^2 + q^2$.
5. Pour $p = 1/2$, on obtient $\mathbb{P}(A) = 1/2$. Le match est équilibré dès que les points le sont. On recherche $n = 2k$ tel que $\mathbb{P}(C_n) < 1/100$. On résout $(2pq)^k = (1/2)^k < 1/100$ ssi $k > \frac{ln(100)}{\ln(2)} > 6$. Donc il faudrait atteindre $n = 14$ points si les joueurs ont un niveau identique.
6. Pour $p = 3/4$, on obtient $\mathbb{P}(A) = 9/10$. Ceci avantage beaucoup le joueur le plus fort. On résout désormais $(2pq)^k = (3/8)^k < 1/100$ ssi $k > \frac{\ln(100)}{\ln(8/3)} > 4$. Donc il faudrait atteindre $n = 10$ points dans ce cas. La partie est (presque) aussi longue.