

DM9 - Corrigé

Exercice 1 : On note $X : \Omega \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$, le numéro de l'urne choisie.

La variable aléatoire X suit une loi uniforme.

1. On note V l'évènement avoir une verte.

On applique la formule des probabilités totales sur le SCEI $\{(X = k)\}_{1 \leq k \leq n}$.

$$\text{Donc } \mathbb{P}(V) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}_{X=k}(V) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

2. On note V_1 et V_2 les évènements 'la 1er (resp. la 2eme) boule tirée est verte'.

Le tirage est sans remise donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}_{X=k}(V_1 \cap V_2) = \mathbb{P}_{X=k}(V_1) \mathbb{P}_{(X=k) \cap V_1}(V_2) = \frac{k}{n} \frac{k-1}{n-1} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

Puis via la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_1 \cap V_2) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}_{X=k}(V_1 \cap V_2) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \frac{2}{n^2(n-1)} \binom{n+1}{3} \\ &= \frac{2(n+1)n(n-1)}{6n^2(n-1)} = \frac{n+1}{3n}. \end{aligned}$$

3. On a désormais des tirages avec remise donc indépendant :

$$\mathbb{P}_{X=k}(V_1 \cap V_2) = \mathbb{P}_{X=k}(V_1) \mathbb{P}_{X=k}(V_2) = \frac{k^2}{n^2}.$$

Puis la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_1 \cap V_2) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}_{X=k}(V_1 \cap V_2) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{k^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

4. On est à nouveau dans la situation de la question précédente.

On peut appliquer la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{V_1 \cap V_2}(X = k) &= \mathbb{P}(X = k) \frac{\mathbb{P}_{X=k}(V_1 \cap V_2)}{\mathbb{P}(V_1 \cap V_2)} \\ &= \frac{1}{n} \frac{k^2}{n^2} \frac{6n^2}{(n+1)(2n+1)} = \frac{6k^2}{n(n+1)(2n+1)}. \end{aligned}$$

Exercice 2 : 1. On note U_1 (resp. U_2) 'on tire la 1er dans l'urne U_1 '. On a :

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(U_1) \mathbb{P}_{U_1}(B_1) + \mathbb{P}(U_2) \mathbb{P}_{U_2}(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{17}{35}.$$

$$\text{Puis } \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(\bar{B}_1) \mathbb{P}_{\bar{B}_1}(B_2) = \frac{17}{35} \times \frac{2}{5} + \frac{18}{35} \times \frac{4}{7} = \frac{598}{35^2} = \frac{598}{1225}.$$

2. On applique la formule des probabilités totales sur le SCEI $\{B_n, \bar{B}_n\}$.

On a : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(\bar{B}_n) \mathbb{P}_{\bar{B}_n}(B_{n+1})$

$$= \mathbb{P}(B_n) \frac{2}{5} + (1 - \mathbb{P}(B_n)) \frac{4}{7} = \frac{-6}{35} \mathbb{P}(B_n) + \frac{4}{7}.$$

3. La suite $(\mathbb{P}(B_n))_{n \geq 0}$ est arithmético-géométrique.

On recherche $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = \frac{-6}{35}l + \frac{4}{7} \Leftrightarrow l = \frac{20}{41}$.

Ainsi $\mathbb{P}(B_n) = \left(\frac{-6}{35}\right)^{n-1} \left(\mathbb{P}(B_1) - \frac{20}{41}\right) + \frac{20}{41} = \frac{20}{41} - \frac{3}{1435} \left(\frac{-6}{35}\right)^{n-1}$.

4. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a $\mathbb{P}(B_n) \rightarrow l = \frac{20}{41}$.

Donc on converge vers une loi de Bernoulli de succès $\frac{20}{41}$. (presque uniforme)