

Produit cartésien d'espaces vectoriels

Pour A et B deux espaces vectoriels quelconques, on considère leur produit :

$$E = A \times B = \{(a, b) \text{ pour } a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

On le munit des opérations naturelles :

- Addition interne $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.
- Produit externe $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$.

1. A l'aide de la définition, montrer que E est un espace vectoriel.
2. On suppose que $\mathcal{L}_A = (a_1, \dots, a_n)$ et $\mathcal{L}_B = (b_1, \dots, b_p)$ sont des familles libres respectives des espaces A et B . Montrer que $\mathcal{L} = \{(a_1, 0_B), \dots, (a_n, 0_B), (0_A, b_1), \dots, (0_A, b_p)\}$ est une famille libre de vecteurs de E .
3. En déduire que $\dim_{\mathbb{K}}(A \times B) = \dim_{\mathbb{K}} A + \dim_{\mathbb{K}} B$ en dimension finie.
4. Calculer la dimension de $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ l'ensemble des matrices augmentées.

1. On vérifie les différents axiomes de la théorie des espaces-vectoriels.
 - Élément neutre de $+$: $(0_A, 0_B)$ convient car $(a, b) + (0_A, 0_B) = (a, b)$.
 - $+$ Opposable : $(a, b) + (-a, -b) = (0_A, 0_B)$.
 - $+$ Commutatif : $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = (a_2, b_2) + (a_1, b_1)$.
 - $+$ Associatif : $[(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] + (a_3, b_3) = (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3) = (a_1, b_1) + [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)]$.
 - Éléments neutre de $\cdot$: $0 \cdot (a, b) = (0_A, 0_B)$, $1 \cdot (a, b) = (a, b)$ et $\lambda \cdot (0_A, 0_B) = (0_A, 0_B)$.
 - $\cdot$ Associatif : $\lambda \cdot [\mu \cdot (a, b)] = (\lambda \mu a, \lambda \mu b) = [\lambda \mu] \cdot (a, b)$.
 - Double distributif : $\lambda \cdot [(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] = (\lambda \cdot (a_1 + a_2), \lambda \cdot (b_1 + b_2)) = \lambda \cdot (a_1, b_1) + \lambda \cdot (a_2, b_2)$. et $(\lambda + \mu) \cdot (a, b) = (\lambda \cdot a + \mu \cdot a, \lambda \cdot b + \mu \cdot b) = \lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b)$.
2. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k (a_k, 0_B) + \sum_{l=1}^p \mu_l (0_A, b_l) = (0_A, 0_B)$. On obtient $(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k, 0_B) + (0_A, \sum_{l=1}^p \mu_l b_l) = (\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k, \sum_{l=1}^p \mu_l b_l) = (0_A, 0_B)$.
 Donc la première coordonnée donne $\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k = 0_A$ puis $a_1 = \dots = a_n = 0$ par liberté de $\mathcal{L}_A$. De même, la seconde coordonnée donne $b_1 = \dots = b_p = 0$ par liberté de $\mathcal{L}_B$. Donc tous les scalaires sont nuls et $\mathcal{L}$ est une famille libre.
3. Si on suppose désormais que $\mathcal{B}_A = (a_1, \dots, a_n)$ et $\mathcal{B}_B = (b_1, \dots, b_p)$ sont des bases respectives de A et B . Soit $(a, b) \in A \times B$. Il existe $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que $a = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k$. De même, on peut écrire $b = \sum_{l=1}^p \mu_l b_l$. Alors $(a, b) = (\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k, \sum_{l=1}^p \mu_l b_l) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (a_k, 0_B) + \sum_{l=1}^p \mu_l (0_A, b_l)$. Donc la famille $\mathcal{B} = \{(a_1, 0_B), \dots, (a_n, 0_B), (0_A, b_1), \dots, (0_A, b_p)\}$ est génératrice de $A \times B$. Or on sait qu'elle est également libre. Donc c'est une base de $A \times B$.
 Puis $\dim(A \times B) = \text{Card}(\mathcal{B}) = n + p = \text{Card}(\mathcal{B}_A) + \text{Card}(\mathcal{B}_B) = \dim A + \dim B$.
4. On a $\dim E = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) + \dim \mathbb{R}^n = np + n = n(p + 1)$.