Supplémentaires liée à la division euclidienne

Soit $D(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit $F = \{P \in \mathbb{R}[X]$ tel que D divise $P\}$.
Montrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. On commence par montrer que F est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
   Il est <u>non vide</u> car $0 = D \times 0$ donc $0 \in F$.
   Soit $P_1, P_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\begin{cases} P_1 & = D \times Q_1 \\ P_2 & = D \times Q_2 \end{cases}$.
   Ainsi $P_1 + \lambda P_2 = D \times (Q_1 + \lambda Q_2) \in F$. Donc F est <u>stable par combinaison linéaire</u>.
2. <u>Somme directe</u> : $F \cap \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \{0\}$.
   Soit $P \in F \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On peut écrit $P = DQ$.
   Donc $\deg(P) = \deg(D) + \deg(Q) \geq n$ si $Q \neq 0$.
   Or $\deg(P) \neq (n-1) < n$. Donc $Q = 0$ puis $P = 0$.
3. <u>Somme totale</u> : $\mathbb{R}[X] \subset F + \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe une unique division euclidienne de P par D.
   Elle s'écrit $P = QD + R$ avec $QD \in F$ et $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car $\deg(R) < \deg(D) = n$.
4. <u>Conclusion</u> On a $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Supplémentaire liée à la formule de Taylor-Young.

Soit $E = C^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.
On définit $F = \{f \in E$ tel que $f^{(n+1)} = 0\}$ et $G_a = \{g \in E$ tel que $g(x) =_{x \to a} o(x-a)^n\}$.
Montrer que $E = F \oplus G_a$.

> Il s'agit d'interpréter la formule de Taylor-Young dans le contexte des espaces vectoriels. Toute fonction f de classe C^n admet un $DL_n(a)$
> $f(x) =_{x \to a} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n$.

1. <u>F et G sont des sous-espaces de E.</u>
   L'espace ambiant E est un bien un $\mathbb{R}$-ev en tant que sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   L'ensemble $F \subset E$ est non vide (car $0 \in F$) et stable par combinaison linéaire.
   En effet pour $f_1, f_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(f_1 + \lambda f_2)^{(n+1)} = 0$ i.e. $f_1 + \lambda f_2 \in F$.
   De même $G \subset E$ est non vide (car $0 \in G$) et stable par combinaison linéaire.
   En effet pour $g_1, g_2 \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(g_1(x) + \lambda g_2(x)) <<_a (x-a)^n$ i.e. $g_1 + \lambda g_2 \in G$.
2. <u>La somme est directe.</u>
   Soit $f \in F \cap G$.
   On a $f^{(n+1)} = 0$. Donc il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)$.
   On peut écrire $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k \sim_{x \to a} b_p(x-a)^p$ si $b_p \neq 0$ est le plus petit des telles indices $p \leq n$. On en déduit que $(x-a)^p <<_{x \to a} (x-a)^n$ car $f \in G$. Donc $p > n$ qui est absurde.
   Donc $\forall k \leq n, b_k = 0$ puis $f : x \mapsto 0$ est la fonction nulle.
3. <u>La somme est totale.</u>
   Soit $h \in E$. On introduit $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ et $g(x) = h(x) - f(x)$.
   On sait d'après la formule de Taylor-Young que $g \in G$ car $h(x) =_{x \to 0} f(x) + o(x-a)^n$.
   Puis par le calcul, on trouve $f^{(n+1)} = 0$ i.e. $f \in F$.
   Donc $h = f + g \in F + G$ et la somme est totale.
4. <u>Conclusion</u> $E = F \oplus G_a$.