Différence entre $\mathbb{R}$-ev et $\mathbb{C}$-ev

Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, déterminer si les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces-vectoriels :

1. $\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$ tel que $2x^2+2y^2+z^2+2xz+2yz=0\}$.
2. $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x^2)=f(x)-f(2-x)\}$.
3. $\{\left(\begin{smallmatrix}z_1\\z_2\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{C}^2$ tel que $\bar{z_1}+z_2=0\}$.

1. On commence par réécrire $2x^2+2y^2+z^2+2xz+2yz=(x+y+z)^2+(x^2+y^2-2xy)=(x+y+z)^2+(x-y)^2$.

   Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on a $2x^2+2y^2+z^2+2xz+2yz=0$ ssi $(x+y+z=0$ et $x-y=0)$ ssi $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x\\x\\-2x\end{smallmatrix}\right)$. Donc cet ensemble est l'espace vectoriel engendré Vect$_{\mathbb{R}}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\}$.

   Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on a $2x^2+2y^2+z^2+2xz+2yz=[(x+y+z)+i(x-y)][(x+y+z)-i(x-y)]=0$ ssi $((x+y+z)+i(x-y)=0$ ou $(x+y+z)-i(x-y)=0)$. Donc cet ensemble est l'union de deux espaces vectoriels donc ce n'est pas un $\mathbb{C}$-ev. Plus précisément, $u_1=\left(\begin{smallmatrix}1\\-i\\0\end{smallmatrix}\right)$ et $u_2=\left(\begin{smallmatrix}1\\i\\0\end{smallmatrix}\right)$ sont deux vecteurs vérifiant la condition. Pourtant $u_1+u_2=\left(\begin{smallmatrix}2\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ne vérifie pas la condition.

2. Dans les deux cas, l'ensemble est un $\mathbb{K}$-ev.

   Non vide car $f_0:x\mapsto 0$ vérifie $f_0(x^2)=f_0(x)-f_0(2-x)$.

   Stable par CL Soit $f_1,f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ vérifiant la condition. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a $(f_1+\lambda f_2)(x^2)=f_1(x^2)+\lambda f_2(x^2)=f_1(x)-f_1(2-x)+\lambda[f_2(x)-f_2(2-x)]=(f_1+\lambda f_2)(x)-(f_1+\lambda f_2)(2-x)$. Donc $(f_1+\lambda f_2)$ vérifie également la condition.

3. Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on a $\left\{\left(\begin{smallmatrix}z_1\\z_2\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{C}^2$ tel que $\bar{z_1}+z_2=0\right\}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1+iy_1\\x_2+iy_2\end{smallmatrix}\right)$ tel que $x_1-iy_1+x_2+iy_2=0\right\}$

   Donc la condition devient $x_1+x_2=0$ et $y_1-y_2=0$. Puis $u=\left(\begin{smallmatrix}x_1+iy_1\\-x_1+iy_1\end{smallmatrix}\right)=x_1\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)+y_1\left(\begin{smallmatrix}i\\i\end{smallmatrix}\right)$. Donc cet ensemble est l'espace vectoriel engendré Vect$_{\mathbb{R}}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}i\\i\end{smallmatrix}\right)\right\}$.

   Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ alors on a vu que $u=\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ est dans cet ensemble. Pourtant $iu=\left(\begin{smallmatrix}i\\-i\end{smallmatrix}\right)$ n'est pas dans l'ensemble. Donc ce n'est pas un $\mathbb{C}$-ev.

Polynôme de Tchebychev

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $T_n\in\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall x\in\mathbb{R}, T_n(\cos x)=\cos(nx)$.
Montrer que $(T_0,T_1,...,T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Il existe plusieurs méthodes classiques de construction des polynômes de Tchebychev.

Méthode par récurrence double.
On introduit $T_0=1$ et $T_1=X$ de sorte que $T_0(\cos x)=\cos 0$ et $T_1(\cos x)=\cos x$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose connue T_n et T_{n+1} vérifiant la relation. On a $\cos[(n+2)x]=\cos x\cos[(n+1)x]-\sin(x)\sin[(n+1)x]$ et $\cos[nx]=\cos x\cos[(n+1)x]+\sin x\sin[(n+1)x]$. Donc en sommant, on trouve $\cos[(n+2)x]+\cos[nx]=2\cos x\cos[(n+1)x]$. Ainsi $\cos[(n+2)x]=2\cos xT_{n+1}(\cos x)-T_n(\cos x)=T_{n+2}(\cos x)$ en posant $T_{n+2}(X)=2XT_{n+1}(X)-T_n(X)$ un polynôme.
Méthode par passage au complexe.
Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $\cos(nx)=\mathrm{Re}\,(\cos x+i\sin x)^n$
$=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\cos^{n-k}(x)(i\sin x)^k\right)$

$= \sum_{k\text{pair}} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) i^k \sin^k x$
$= \sum_{l=0}^{n/2} \binom{n}{2l} \cos^{n-2l}(x)(-1)^l (1-\cos^2 x)^l = T_n(\cos x)$.

En posant $T_n(X) = \sum_{l=0}^{n/2} \binom{n}{2l} X^{n-2l}(X^2-1)^l$ un polynôme.

Dans les deux cas, on peut obtenir que $\deg T_n = n$. Le coefficient dominant est 2^{n-1} pour $n \geq 1$.

Donc la famille $\mathcal{F} = (T_0, T_1, ..., T_n)$ est libre car échelonnée en degré.

Ainsi c'est une base car Card$\mathcal{F} = n+1 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[X])$.