Dérivation discrète des polynômes

On considère l'application $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est linéaire et calculer son noyau.
2. On considère Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que Δ_n défini bien un endomorphisme et préciser son noyau et son image.
3. En déduire que Δ est surjective.
4. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta P = Q$ et $P(0) = 0$.
   Ceci permet de créer une application $\nabla : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], Q \mapsto P$ l'unique solution.
   Rmq : C'est l'unique primitive discrète qui s'annule en 0.
5. Montrer que ∇ est une application linéaire. (non trivial !)
6. Montrer que $\Delta \circ \nabla = id_{\mathbb{R}[X]}$ et que $p = \nabla \circ \Delta$ est un projecteur dont on précisera les espaces propres.

---

1. Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\Delta(P_1 + \lambda P_2) = (P_1(X+1) + \lambda P_2(X+1)) - (P_1(X) + \lambda P_2(X)) = \Delta P_1 + \lambda \Delta P_2$. Donc Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   On a $P \in \mathrm{Ker}\Delta$ ssi $P(X+1) - P(X) = 0$ ssi P est constant.
   En effet, notons $Q(X) = P(X) - P(0)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}, Q(n) = 0$ par récurrence immédiate. Ainsi $Q = 0$ car il admet une infinité de racines. Donc $P(X) = P(0)$ est constant.
   Ainsi $\mathrm{Ker}\Delta = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$.
2. Seul la bonne définition est utile ici. Pour $f : E \to F$, il s'agit de montrer que pour tout $x \in E$ alors $f(x) \in F$.

   Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\deg(\Delta(P)) \leq \deg P \leq n$. Donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi Δ_n est bien définie. La linéarité est celle de la correspondance Δ et est déjà acquise.
   On a $\mathrm{Ker}\Delta_n = \mathrm{Ker}\Delta \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$.
   Puis $\mathrm{Im}\Delta_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\Delta(1), \Delta(X), ..., \Delta(X^n)\right)$
   $= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(0, 1, 2X+1, ..., nX^{n-1} + ...\right) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On dispose de $q = \deg Q$. Donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour $n = q+1$ et il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = \Delta_n P = \Delta P \in \mathrm{Im}\Delta$. Donc Δ est surjective car $\mathrm{Im}\Delta = \mathbb{R}[X]$.
4. On fixe $Q \in \mathbb{R}[X]$. On recherche les solutions de l'équation linéaire : $\Delta P = Q$. On sait que $Q \in \mathrm{Im}\Delta$. Donc il existe une solution particulière $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta P_1 = Q$. Ainsi l'ensemble des solution est $S = P_1 + \mathrm{Ker}\Delta = \{P_1 + \lambda \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}\}$. On souhaite également la condition $P(0) = 0$ ceci impose $\lambda = -P_1(0)$. Donc $P(X) = P_1(X) - P_1(0)$ est l'unique solution du système.
5. Soit $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $P_1 = \nabla Q_1$ et $P_2 = \nabla Q_2$.
   On sait donc $\Delta P_1 = Q_1$ et $\Delta P_2 = Q_2$ avec $P_1(0) = P_2(0) = 0$.
   Ainsi $\Delta(P_1 + \lambda P_2) = Q_1 + \lambda Q_2$ avec $(P_1 + \lambda P_2)(0) = 0$.
   Ainsi $P_1 + \lambda P_2$ est l'unique solution trouvée. Donc $\nabla(Q_1 + \lambda Q_2) = P_1 + \lambda P_2 = \nabla Q_1 + \lambda \nabla Q_2$. Donc ∇ est un endomorphisme.

6. Δ et ∇ sont des réciproques partielles. La composée dans un sens est l'identité et dans l'autre sens on trouve toujours (au moins) un projecteur.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to E$ vérifie $g \circ f = id_E$ alors on peut montrer que
— f est injective et g est surjective.
— $p = f \circ g$ est le projecteur sur $\mathrm{Im} f$ le long de $\mathrm{Ker} g$.
— $F = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} g$.

On sait que $\nabla Q = P$ ssi $\Delta P = Q$ et $P(0) = 0$.

Donc pour Q quelconque, $\Delta(\nabla Q) = Q$.

Par contre, $\nabla(\Delta P) = P$ que lorsque $P(0) = 0$.

Ainsi $\Delta \circ \nabla = Id$. Notons $p = \nabla \circ \Delta$. On a $p^2 = \nabla \circ (\Delta \circ \nabla) \circ \Delta = \nabla \circ Id \circ \Delta = p$. Donc p est un projecteur.

Puis $\mathrm{Ker} p = \mathrm{Ker} \Delta = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$ les polynômes constants.

Et $\mathrm{Im} p = \mathrm{Im} \nabla = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(0) = 0\}$ l'hyperplan des polynômes s'annulant en 0.