Semaine 26 - Du 5 au 9 Mai 2025

Probabilités finies

Révision de la semaine 25

Variables aléatoires

Une variable aléatoire

Définition de $X : \Omega \to E$ avec E quelconque. Cas des variables réelles.
Espace probabilisé induit $(X(\Omega), \mathbb{P}_X)$ par la variable aléatoire X.
Espérance, linéarité et croissance.

Exemples standards

Variable aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}(X(\Omega))$, de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ ou binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Couple de variables aléatoires

Définition de la variable couple. Loi conjointe et lois marginales du couple.
Lien entre les lois. Indépendance des variables notée $X \perp\!\!\!\perp Y$.
Formule du produit pour des variables indépendantes.
Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Liste de Questions de cours :

- **a)** Enoncer et démontrer la formule des probabilités composées pour n évènements.
- **b)** Enoncer et démontrer les formules des probabilités totales et de Bayes pour un SCEI.
- **c)** Montrer que l'indépendance mutuellement de n évènements entraîne l'indépendance deux à deux et que la réciproque est fausse.
- **d)** Montrer que l'espérance est linéaire et croissante.
- **e)** Soit $D_1 \sim D_2 \sim \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$ deux V.A. indépendantes.
  Calculer la loi et l'espérance de $X = \min(D_1, D_2)$.
- **f)** Soit $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ deux V.A. indépendantes.
  Montrer que $S = X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Exercices d'Application du Cours

1. Soit $X_1 \sim ... \sim X_p \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ des V.A. mutuellement indépendantes et de loi identique. On note $Y = \max(X_1, ..., X_n)$.
   (a) Déterminer l'univers $Y(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}(Y = 1)$.
   (b) Pour $k \in Y(\Omega)$, montrer que $\mathbb{P}(Y \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$.
   (c) En déduire la loi de Y et son espérance.

2. On considère trois urnes de couleurs :
   — L'urne rouge contient 2 boules rouges, 1 boule verte et 1 boule bleue.
   — L'urne verte contient 1 boule rouge, 2 boules vertes et 1 boule bleue.
   — L'urne bleue contient 1 boule rouge, 1 boule verte et 2 boules bleues.
   On effectue des tirages successifs avec remise suivant les règles :
   — Le premier tirage s'effectue dans l'urne bleue.
   — La couleur du tirage désigne l'urne pour faire le tirage suivant.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ avec les probabilités respectives des événements : R_n = la n-ième boule est rouge, V_n = la n-ième boule est verte et B_n = la n-ième boule est bleue.
   (a) Justifier que $\{R_n, V_n, B_n\}$ forment un SCEI.
   En déduire que $(1, 1, 1).X_n = 1$ avec . le produit matriciel.
   (b) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
   (c) Montrer que $A^2 = 5A - 4I_3$ et en déduire A^n.
   (d) En déduire X_n puis sa limite lorsque $n \to +\infty$.
   (e) La boule rouge est gagnante et rapporte 2 points et les autres font perdre 1 point. On note G_n le gain du n-ième tirage. Montrer que $\mathbb{E}(G_n) = (2, -1, -1).X_n$.
   (f) Calculer $(2, -1, -1).A$ et en déduire une relation de récurrence sur la suite $u_n = \mathbb{E}(G_n)$. Conclure.

Devoir libre

1. Soit $X : \Omega \to X(\Omega)$ une variable aléatoire réelle.
   On définit sa fonction génératrice par $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ pour $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}, M_X(t) \geq 0$.
   (b) Montrer que $M_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞
   (c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (d) Montrer que pour tout coefficients $a, b \in \mathbb{R}$, on a $M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$.
   (e) Calculer M_X si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ suit une loi uniforme.
   (f) Retrouver l'espérance et la variance d'une telle variable uniforme à l'aide du 3.
   (g) Calculer M_X si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ suit la loi binomiale.
   (h) Retrouver l'espérance et la variance d'une telle variable binomiale à l'aide du 3.
   (i) Montrer que pour n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, ..., X_n$, si l'on définit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ alors $M_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n M_{X_k}(t)$.