

Calcul d'une limite avec DL

Soit $0 < a < b$ deux réels.
Montrer que $\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$ tend vers $\sqrt{ab}$.

On a $a^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(a)\right) =_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(a)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

De même $b^{1/n} =_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(b)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc $\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} =_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+1}{2} + \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) =_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(\sqrt{ab})}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n &=_{n \rightarrow +\infty} \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{\ln(\sqrt{ab})}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &=_{n \rightarrow +\infty} \exp\left[n \frac{\ln(\sqrt{ab})}{n} + no(1/n)\right] \\ &\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \exp[\ln(\sqrt{ab})] = \sqrt{ab} \end{aligned}$$

Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}$ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
2. Déterminer le $DL_3(0)$ de f .
3. En déduire (à nouveau) la formule de $\sum_{k=1}^n k^3$.

1. Au voisinage de 0, on a $e^x - 1 \sim_0 x$ et $e^{(n+1)x} - 1 \sim_0 (n+1)x$. Donc $f(x) \sim_0 \frac{(n+1)x}{x} = n+1$.
Donc f se prolonge par continuité en posant $f(0) = n+1$.
2. On a $e^{ax} - 1 =_{x \rightarrow 0} ax + \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^3}{6}x^3 + \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^4)$.

$$\begin{aligned} f(x) &=_{x \rightarrow 0} \frac{(n+1)x + \frac{(n+1)^2}{2}x^2 + \frac{(n+1)^3}{6}x^3 + \frac{(n+1)^4}{24}x^4 + o(x^4)}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)} \\ &=_{x \rightarrow 0} (n+1) \frac{1 + (n+1)\frac{x}{2} + (n+1)^2\frac{x^2}{6} + (n+1)^3\frac{x^3}{24} + o(x^3)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)} \\ &=_{x \rightarrow 0} (n+1) \left(1 + (n+1)\frac{x}{2} + (n+1)^2\frac{x^2}{6} + (n+1)^3\frac{x^3}{24} + o(x^3)\right) \\ &\quad \times \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)\right) \\ &=_{x \rightarrow 0} (n+1) \left(1 + (n+1)\frac{x}{2} + (n+1)^2\frac{x^2}{6} + (n+1)^3\frac{x^3}{24} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right) \\ &=_{x \rightarrow 0} (n+1) \left(1 + \frac{n}{2}x + \left[\frac{(n+1)^2}{6} - \frac{(n+1)}{4} + \frac{1}{12}\right]x^2 + \left[\frac{(n+1)^3}{6} - \frac{(n+1)^2}{12} + \frac{(n+1)}{24}\right]x^3 + o(x^3)\right) \\ &=_{x \rightarrow 0} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}x^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{24}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

3. On remarque que $\sum_{k=0}^n e^{kx} = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} = f(x)$.

Et on peut également faire le $DL_n(0)$ en tant que combinaison linéaire :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n e^{kx} &= \sum_{k=0}^n 1 + kx + k^2 x^2 / 2 + k^3 x^3 / 6 + o(x^3) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n 1 \right) + \left(\sum_{k=0}^n k \right) x + \left(\sum_{k=0}^n k^2 \right) x^2 / 2 + \left(\sum_{k=0}^n k^3 \right) x^3 / 6 + o(x^3)\end{aligned}$$

En identifiant avec la question précédente, on retrouve les formules :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n 1 &= n+1 \text{ à l'ordre 0.} \\ \sum_{k=0}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \text{ à l'ordre 1.} \\ \sum_{k=0}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ à l'ordre 2.} \\ \sum_{k=0}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ à l'ordre 3.}\end{aligned}$$

Suite définie de manière implicite.

On recherche les solutions de l'équation $(x^2 + 1) \sin x = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe exactement deux solutions $a_n < b_n$ dans l'intervalle $[0, \pi] + 2n\pi$.
2. Déterminer un développement asymptotique de ses deux suites à l'ordre 4.

1. On étudie la fonction $f(x) = (x^2 + 1) \sin x$. Elle est continue, positive et strictement croissante sur les intervalles $I_n = [0, \pi/2] + 2n\pi$ car $x \mapsto x^2 + 1$ et $x \mapsto \sin x$ le sont. De plus $f(0 + 2n\pi) = f(\pi + 2n\pi) = 0 < 1$ et $f(\pi/2 + 2n\pi) = (\pi/2 + 2n\pi)^2 + 1 > 1$. Donc le théorème de la bijection continue donne l'existence d'une unique solution $a_n \in I_n$ à l'équation $f(x) = 1$

Et $f'(x) = 2x \sin x + (x^2 + 1) \cos x$. On décompose $f'(x) = 2x \cos x g(x)$ en notant $g(x) = \tan(x) + \frac{x^2+1}{2x} = \tan(x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$. On calcule $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{x^2-1}{2x^2}$ qui est strictement positive sur $J_n = [\pi/2, \pi] + 2n\pi$. De plus $\lim_{(\pi/2+2n\pi)^+} g = -\infty$ et $\lim_{(\pi+2n\pi)} g = \frac{(\pi+2n\pi)^2+1}{2(\pi+2n\pi)} > 0$. Donc g s'annule une unique fois sur J_n . On note α_n tel que $g(\alpha_n) = 0$. On en déduit que f' est strictement positive sur $](\pi + 2n\pi), \alpha_n[$ et strictement négative sur $]\alpha_n, (\pi + 2n\pi)[$.

On a déjà $f(\pi/2 + 2n\pi) > 1$ et on a $f(\pi + 2n\pi) = 0 < 1$. Donc f s'annule une unique fois en $b_n \in J_n$.

De plus par construction, $2n\pi < a_n < (\pi/2 + 2n\pi) < \alpha_n < b_n < (\pi + 2n\pi)$.

2. Par encadrement, on sait que $a_n \sim_{+\infty} b_n \sim_{+\infty} 2n\pi$.

On a $a_n = 2n\pi + \arcsin\left(\frac{1}{a_n^2+1}\right) = 2n\pi + \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

De même $b_n = 2n\pi + \pi - \arcsin\left(\frac{1}{b_n^2+1}\right) = (2n+1)\pi - \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.