

Fonction génératrice d'une loi de probabilité

Soit $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$ une variable aléatoire réelle.

On définit sa fonction génératrice par $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M_X(t) \geq 0$.
 2. Montrer que $M_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ .
 3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 4. Montrer que pour tout coefficients $a, b \in \mathbb{R}$, on a $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$.
 5. Calculer M_X si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ suit une loi uniforme.
 6. Retrouver l'espérance et la variance d'une telle variable uniforme à l'aide du 3.
 7. Calculer M_X si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ suit la loi binomiale.
 8. Retrouver l'espérance et la variance d'une telle variable binomiale à l'aide du 3.
 9. Montrer que pour n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_n$, si l'on définit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ alors $M_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n M_{X_k}(t)$.
1. Soit $x \in X(\Omega)$ et $t \in \mathbb{R}$. On a $e^{tx} \geq 0$ donc la moyenne pondérée par des probabilités : $\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) e^{tx} \geq 0$.
 2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, $f_x : t \mapsto e^{tx}$ est de classe C^∞ et on a $f_x^{(k)}(t) = x^k e^{tx}$.
Donc la combinaison linéaire $M_X = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) f_x$ est aussi C^∞ .
 3. De plus, la dérivée n -ième est :
 $M_X^{(k)}(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) f_x^{(k)}(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) x^k e^{tx} = \mathbb{E}(X^k e^{tX})$.
On applique la relation précédente en $t = 0$ et on a : $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k e^{0 \cdot X}) = \mathbb{E}(X^k)$.
 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a $M_{aX+b}(t) = \mathbb{E}(e^{t(aX+b)}) = \mathbb{E}(e^{tb} e^{atX}) = e^{tb} \mathbb{E}(e^{atX}) = e^{bt} M_X(at)$.
 5. Dans le cas d'une loi uniforme, on a :
 $M_X(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} e^{tk} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (e^t)^k = \frac{e^t(1-e^{nt})}{n(1-e^t)}$.
 6. On obtient par dérivation :
 $M_X'(t) = \frac{e^t - (n+1)e^{(n+1)t} + ne^{(n+2)t}}{n(e^t-1)^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1 - (n+1) + n(n+2)}{2n} = \frac{n+1}{2}$.
Et ainsi on a $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.
Puis de la même manière, on trouve :
 $M_X''(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{2n^2+3n+1}{6}$ donnant la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$
puis $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{n^2-1}{12}$.
 7. Dans le cas de loi binomiale, on a :
 $M_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} (e^t)^k = (q + pe^t)^n$
d'après la formule du binôme de Newton.
 8. En dérivant, on trouve :
 $M_X'(t) = npe^t(q + pe^t)^{n-1}$. Donc $\mathbb{E}(X) = M_X'(0) = np$.
De plus $M_X''(t) = n(n-1)p^2e^{2t}(q + pe^t)^{n-2} + npe^t(q + pe^t)^{n-1}$
et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = M_X''(0) - (np)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$.
 9. Fixons $t \in \mathbb{R}$. Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes donc $e^{tX_1}, \dots, e^{tX_n}$ le sont aussi d'après le Lemme des coalitions. Puis :
 $M_{S_n}(t) = \mathbb{E}(e^{t(X_1+\dots+X_n)}) = \mathbb{E}(e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_k}) = \prod_{k=1}^n M_{X_k}(t)$.