Devoir Surveillé de Mathématiques n° 10
le samedi 10 Mai 2025 - durée 4h

Exercice 1 : On dispose de trois urnes contenant chacune 2 boules blanches et 5 boules noires. On extrait simultanément une boule dans chacune des urnes. Puis on choisit une boule gagnant parmi les trois extraites.

Déterminer la probabilité des évènements suivants :

1. Les trois premières boules tirées sont blanches.
2. La boule gagnante est blanche.
3. Sachant que la boule gagnante est noire, on avait extrait au moins deux boules noires.

Exercice 2 : On lance trois dés équilibrés à 6 faces. On note U le plus petit, V le plus grand et W la valeur intermédiaire. On a donc $U \leq W \leq V$ presque sûrement. On donne les valeurs $\sum_{k=1}^{6} k^2 = 91, \sum_{k=1}^{6} k^3 = 441$ et $\sum_{k=1}^{6} k^4 = 2275$.

1. Ecrire un programme Python qui simule la valeur de U.
   On pourra utiliser la fonction **random.randrange**.
2. Pour $k \in [\![1, 6]\!]$, calculer $\mathbb{P}(V \leq k)$ et en déduire la loi de V.
3. Calculer l'espérance et la variance de V.
4. Calculer la loi, l'espérance et la variance de U.
5. En déduire $\mathbb{E}(W)$. Commenter ce résultat.
6. Calculer $\mathbb{P}(W = 1)$. Commenter ce résultat.

Problème I : On étudie l'évolution d'une population de bactéries répondant au modèle suivant. L'évolution est supposée réalisée par étapes successives. A chaque étape donnée, chaque bactérie, indépendamment des autres, peut :
— soit se diviser en deux bactéries indépendantes avec une probabilité 2/3.
— soit mourir avec une probabilité 1/3.
On appelle X_n le nombre de total de bactéries après la n-ième étape. Au départ, on suppose qu'il n'y a qu'une bactérie et on note ainsi $X_0 = 1$.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_1.
2. (a) Pour $n \geq 1$, justifier que X_n ne prend que des valeurs paires et préciser l'univers $X_n(\Omega)$.
   (b) Ecrire un programme Python qui prend en argument un entier n et renvoie sous forme d'une liste les valeurs d'une simulation de $(X_1, ..., X_n)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$ pour $i \in X_n(\Omega)$ et $j \in X_{n+1}(\Omega)$.
3. On définit la fonction génératrice de X_n par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_n(t) = \mathbb{E}(t^{X_n}) = \sum_{i \in X_n(\Omega)} \mathbb{P}(X_n = i) t^i$$

   (a) Montrer que $G_{n+1} = G_n \circ G_1$.
   (b) Montrer que G_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $G_n(1)$ et $G'_n(1)$.
   (c) En déduire une relation de récurrence entre $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$.
   (d) Calculer l'espérance de X_n en fonction de n.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, G_{n+1}(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(G_n(x))^2$.
   (b) En déduire que $u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_n^2$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par $1/2$.
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite finie l à déterminer.
   Décrire l'évènement dont l est la probabilité.

Problème II : Soit n un entier naturel. On dispose de $n+1$ urnes numérotées $\mathcal{U}_0, ..., \mathcal{U}_n$. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, l'urne $\mathcal{U}_j$ contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j.

On effectue une succession de tirages avec remise selon le protocole suivant :

— Au premier tirage, on tire une boule dans l'urne $\mathcal{U}_n$.

— A l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule numéro j, le second tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_j$.

— On continue alors les tirages selon la même règle : pour tout tirage, on note le numéro de la boule j et on effectue le tirage suivant dans l'urne $\mathcal{U}_j$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On note X_k le numéro tiré lors du k-ième tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne $\mathcal{U}_n$, on pose $X_0 = n$.

Enfin, on définit les matrices : $W_k \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ par :

$$W_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 0) \\ \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

1. (a) Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, écrire $\mathbb{P}(X_{k+1} = j)$ en fonction de certains des nombres $\mathbb{P}(X_k = i)$, où $i \in [\![0, n]\!]$.
   (b) En déduire la relation : $W_{k+1} = AW_k$.
2. On définit la matrice ligne $B = (0, 1, 2, ..., n) \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $BW_k = \mathbb{E}(X_k)$.
   (b) Calculer le produit BA en fonction de B.
   (c) Exprimer pour tout entier naturel k, $\mathbb{E}(X_{k+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.
   (d) En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de k et n.
3. (a) Déterminer une matrice ligne $C \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $CW_k = \mathbb{E}(X_k^2)$.
   (b) Calculer le produit CA en fonction de B et C.
   (c) En déduire que $\mathbb{E}(X_{k+1}^2) = \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_k^2) + \frac{1}{6}\mathbb{E}(X_k)$.
4. Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = \mathbb{E}(X_k^2) - \frac{n}{2^k}$.
   (a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ est une suite géométrique.
   (b) En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X_k^2)$ en fonction de k et n.
   (c) Exprimer la variance $\mathbb{V}(X_k)$ en fonction de k et n.
5. ($\star\star$) On pose $T = \left((-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq n+1}}$ une matrice triangulaire constituée de coefficients binomiaux.
   (a) Montrer que $T^{-1} = \left(\binom{j-1}{i-1}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq n+1}}$ est l'inverse de T.
   (b) Montrer que $T^{-1}AT$ est une matrice diagonale.
   (c) En déduire que, $\mathbb{P}(X_k = j) = \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} \frac{1}{(1+i+j)^k}$.
   (d) Déterminer la limite $\lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(X_k = j)$. Commenter ce résultat.