DS n^o 10 - Corrigé

Exercice 1 : 1. Notons B_k l'évènement : 'La k-ième boule est blanche'.
On remarque que B_1, B_2 et B_3 sont indépendants.
Donc $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(B_3) = (2/7)^3 = 8/343$.

2. On note A l'évènement 'La dernière boule est blanche' et on appelle X la variable aléatoire du nombre de boules blanches extraites des trois urnes. On a $X \sim \mathcal{B}(3, 2/7)$. Les évènements $(X = 0), (X = 1), (X = 2)$ et $(X = 3)$ forment un système complet d'événements incompatibles donc par la formule de probabilité totale :
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0^3} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}_{(X=k)}(A) = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}(2/7)^k(5/7)^{3-k}(k/3) = 98/343 = 2/7.$$

3. On recherche à calculer $\mathbb{P}_{\bar{A}}(X \leq 1)$. On peut appliquer la définition :
$$\mathbb{P}_{\bar{A}}(X \leq 1) = \frac{\mathbb{P}(X \leq 1 \cap \bar{A})}{\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{\mathbb{P}(X = 0 \cap \bar{A}) + \mathbb{P}(X = 1 \cap \bar{A})}{1 - \mathbb{P}(A)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}_{(X=0)}(\bar{A}) + \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}_{(X=1)}(\bar{A})}{1 - \mathbb{P}(A)}$$
$$= \frac{(5/7)^3 \times 1 + 3(2/7)(5/7)^2 \times (2/3)}{5/7} = 225/245 = 45/49.$$

Exercice 2 : 1. On peut écrire le programme :

```
import random as rd
def simul_U():
   d1 = rd.randrange(1,7)
   d2 = rd.randrange(1,7)
   d3 = rd.randrange(1,7)
   return min([d1,d2,d3])
```

2. On pose $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$ et $V : \Omega \to [\![1, 6]\!], (d_1, d_2, d_3) \mapsto \max(d_1, d_2, d_3)$.
Donc $\mathbb{P}(V \leq k) = \mathbb{P}\{(d_1, d_2, d_3) \text{ tel que } d_i \leq k\} = \dfrac{k^3}{6^3}$.
Puis $\mathbb{P}(V = k) = \mathbb{P}(V \leq k) - \mathbb{P}(V \leq k - 1) = \dfrac{k^3 - (k - 1)^3}{216} = \dfrac{3k^2 - 3k + 1}{216}$.

3. On en déduit $\mathbb{E}(V) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k\frac{3k^2 - 3k + 1}{216} = \frac{1071}{216} = \frac{119}{24}$

Puis $\mathbb{E}(V^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^2\frac{3k^2 - 3k + 1}{216} = \frac{5593}{216}$.

Puis $\mathbb{V}(V) = \mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(V)^2 = \dfrac{2261}{1728}$.

4. Par symétrie du problème, on trouve que $7-U$ suit également la loi de V. Donc $\mathbb{E}(7-U) = \dfrac{119}{24}$ et $\mathbb{V}(7 - U) = \dfrac{2261}{1768}$.
Or $\mathbb{E}(7 - U) = 7 - \mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(7 - U) = \mathbb{V}(U)$.
Donc $\mathbb{E}(U) = \dfrac{49}{24}$ et $\mathbb{V}(U) = \dfrac{2261}{1768}$.

5. On a $U+V+W=D_1+D_2+D_3$ avec les résultats des trois dés indépendants.
   Donc $\mathbb{E}(W)=3\mathbb{E}(D_i)-\mathbb{E}(V)-\mathbb{E}(U)=\dfrac{7}{2}$.
   L'espérance du dé intermédiaire est équilibrée.
6. Puis $\mathbb{P}(W=1)=\mathbb{P}(U=W=1)$
   $=\mathbb{P}\{(d_1,d_2,d_3)$ tel que $d_i=d_j=1\}$
   $=\dfrac{5.C_3^2+1}{216}=\dfrac{2}{27}$.
   avec C_3^2 le choix des deux dés $\{i,j\}$ qui font un 1 et 5 le choix du troisième dé distinct.
   On isole le triple $(1,1,1)$ qui serait dénombré plusieurs fois.
   Donc la loi de W n'est pas uniforme car $\mathbb{P}(W=1)\neq\dfrac{1}{6}$

Problème I : 1. On a $\mathbb{P}(X_1=0)=1/3$ si la bactérie meurt
et $\mathbb{P}(X_1=2)=2/3$ si la bactérie se divise.
Ainsi $X_1=2Y$ avec $Y\sim\mathcal{B}(2/3)$.
Donc $\mathbb{E}(X_1)=2\mathbb{E}(Y)=\dfrac{4}{3}$.
Puis $\mathbb{V}(X_1)=4\mathbb{V}(Y)=\dfrac{8}{9}$.

2. (a) On a $X_1(\Omega)=\{0,2\}$, $X_2(\Omega)=\{0,2,4\}$ et $X_3(\Omega)=\{0,2,4,6,8\}$.
   Chaque bactérie devient soit 0 soit 2 bactéries un nombre pair.
   Donc la population totale est un nombre pair de bactéries.
   On trouve $X_n(\Omega)=\{k$ tel que k est pair et $0\leq k\leq 2^n\}$.
   Dans le pire des cas à chaque étape il y a division de toutes les bactéries et ainsi $X_{n+1}=2X_n$ est une suite géométrique de raison 2.

   (b)
```
def simul(n):
   L = []
   X = 1
   for etape in range(n):
      population = 0
      for bacterie in range(X):
         if rd.random()<2/3:
            population += 2
      X=population
      L.append(X)
   return L
```

   (c) En supposant $X_n=i$ alors on réalise i expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre de succès $2/3$ qui représente la division. L'évènement $X_{n+1}=2k$ est issue de k divisions i.e. k succès dans la loi binomiale $\mathcal{B}(i,2/3)$.
   Donc $\mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1}=2k)=\dbinom{i}{k}(2/3)^k(1/3)^{i-k}=\dbinom{i}{k}2^k\dfrac{1}{3^i}$.

3. (a) On a $G_1(t) = 1/3 + 2/3t^2$ et

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(t) &= \sum_{j \in X_{n+1}(\Omega)} \mathbb{P}(X_{n+1} = j)t^j \\
&= \sum_{j \in X_{n+1}(\Omega)} \sum_{i \in X_n(\Omega)} \mathbb{P}(X_n = i)\mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = j)t^j \text{ FPT} \\
&= \sum_{i \in X_n(\Omega)} \mathbb{P}(X_n = i) \sum_{k=0}^{2^n} \mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = 2k)t^{2k} \\
&= \sum_{i \in X_n(\Omega)} \mathbb{P}(X_n = i) \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} 2^k/3^i t^{2k} \\
&= \sum_{i \in X_n(\Omega)} \mathbb{P}(X_n = i)(1 + 2t^2)^i/3^i \\
&= \sum_{i \in X_n(\Omega)} \mathbb{P}(X_n = i)G_1(t)^i \\
&= G_n(G_1(t)) = (G_n \circ G_1)(t)
\end{aligned}$$

(b) On a $G_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \mathbb{P}(X_n = 2k)t^{2k}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme polynôme.

Puis $G_n(1) = \displaystyle\sum_{i \in X_n(\Omega)} \mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{P}(X_n \in X_n(\Omega)) = 1$.

Et $G_n'(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \mathbb{P}(X_n = 2k)2kt^{2k-1} = \sum_{i \in X_n(\Omega)} i\mathbb{P}(X_n = i)t^{i-1}$

Donc en $t = 1$, $G_n'(1) = \displaystyle\sum_{i \in X_n(\Omega)} i\mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{E}(X_n)$.

Le rang $i = 0$ ne pose pas problème car $i\mathbb{P}(X_n = i)t^{i-1} = 0$ indépendant de t.

(c) On a $G_{n+1}(t) = G_n(G_1(t))$ donc $G_{n+1}'(t) = G_1'(t)G_n'(G_1(t))$.

Puis en $t = 1$, on obtient $\mathbb{E}(X_{n+1}) = G_{n+1}'(1) = G_1'(1)G_n'(G_1(1))$

$= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{4}{3}\mathbb{E}(X_n)$.

(d) Donc $\mathbb{E}(X_n)$ est une suite géométrique et $\mathbb{E}(X_n) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.

4. (a) On a $G_{n+1} = G_1 \circ G_n$.

On en déduit que $G_n = G_1 \circ G_1 \circ ... \circ G_1 = G_1^n$ par récurrence immédiate.

Donc $G_1 \circ G_n = G_1 \circ G_1^n = G_1^{n+1} = G_{n+1}$.

Or $G_1(t) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}t^2$ donc $G_{n+1}(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}(G_n(x))^2$.

(b) On a $G_n(0) = \mathbb{P}(X_n = 0) = u_n$ car les autres termes s'annulent dans la somme.

Ainsi $u_{n+1} = G_{n+1}(0) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}(G_n(0))^2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}u_n^2$.

(c) On a $\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1$ car il n'y a déjà plus de bactérie à l'étape n.

Donc $(X_n = 0) \subset (X_{n+1} = 0)$ les évènements sont inclus et par croissance de la probabilité $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0) \leq \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = u_{n+1}$. La suite est croissante.

On montre par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1/2$.

Init. $u_0 = 0$ et $u_1 = 1/3$ vérifie le prédicat.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [0, 1/2]$. La fonction G_1 est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $u_{n+1} = G_1(u_n) \in [G_1(0), G_1(1/2)] = [1/3, 1/2]$. Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1/2$.

(d) D'après le théorème de la convergence monotone $u_n \to l \leq 1/2$ une limite finie. On a $G_1(l) = l$ car G_1 est continue. L'équation $l = 1/3 + 2/3l^2$ admet pour solution $l \in \{1/2, 1\}$. Or $l \leq 1/2$ donc $l = \dfrac{1}{2}$.

Ce décrit l'évènement "A partir d'un certain rang la population de bactéries s'éteint". Il y a donc une chance sur deux de disparition.

Problème II : D'après HEC Paris, Mathématiques option B/L 2014.

1. Modélisation de la Chaîne de Markov.

   (a) On utilise la formule de probabilité totale sur le SCEI $\{X_n = i\}_{0 \leq i \leq n}$:

   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = i)\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=j}^{n} \mathbb{P}(X_n = i)\frac{1}{i+1}.$$

   (b) Pour un indice $j \in [\![0, n]\!]$, on calcul :

   $$[AW_k]_{j+1,1} = \sum_{i=0}^{n} [A]_{j+1,i+1}[W_k]_{i+1,1}$$

   $$= \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i+1}\mathbb{P}(X_k = i) = \mathbb{P}(X_{k+1} = j) = [W_{k+1}]_{j+1,1}.$$

2. Calcul de l'espérance.

   (a) Par définition, on a : $\mathbb{E}(X_k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_k = i)i$.

   Donc la ligne $B = (0, 1, 2, 3, ..., n)$, permet d'obtenir : $BW_k = \mathbb{E}(X_k)$.

   (b) On a : $[BA]_{1,i+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} [B]_{1,j+1}[A]_{j+1,i+1}$

   $$= \sum_{j=0}^{i} j\frac{1}{i+1} = \frac{i(i+1)}{2(i+1)} = \frac{i}{2}.$$

   Donc $BA = \dfrac{1}{2}B$.

   (c) On a $\mathbb{E}(X_{k+1}) = BW_{k+1} = BAW_k = \dfrac{1}{2}BW_k = \dfrac{1}{2}\mathbb{E}(X_k)$.

   (d) Les espérances constituent ainsi une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $\mathbb{E}(X_0) = n$.

   Donc $\mathbb{E}(X_k) = n/2^k$.

3. (a) A l'aide du théorème de transfert, on a $\mathbb{E}(X_k^2) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_k = j)j^2$.

Donc $C = (0, 1, 4, 9, ..., n^2)$ convient.

(b) On a $[CA]_{1,i+1} = \sum_{j=0}^{i} j^2 \frac{1}{i+1}$
$= \frac{i(i+1)(2i+1)}{6(i+1)} = i^2/3 + i/6 = \frac{1}{3}[C]_{1,i+1} + \frac{1}{6}[B]_{1,i+1}$.
Donc $CA = \frac{1}{3}C + \frac{1}{6}B$.

(c) On a $\mathbb{E}(X_{k+1}^2) = CW_{k+1} = CAW_k = \frac{1}{3}CW_k + \frac{1}{6}BW_k = \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_k^2) + \frac{1}{6}\mathbb{E}(X_k)$.

4. (a) On a $u_{k+1} = \mathbb{E}(X_{k+1}^2) - n/2^{k+1} = \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_k^2) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) n/2^k = \frac{1}{3}u_k$.

(b) Ainsi $u_k = u_0/3^k$. Or $u_0 = n^2 - n$. Donc $\mathbb{E}(X_k^2) = u_k + n/2^k = (n^2 - n)/3^k + n/2^k$.

(c) D'après la formule de Koenig-Huygens, on a :
$\mathbb{V}(X_k) = \mathbb{E}(X_k^2) - \mathbb{E}(X_k)^2 = (n^2 - n)/3^k + n/2^k - n^2/4^k$.

5. (a) On calcul le produit via les coefficients :
$$[TT^{-1}]_{i+1,j+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{j}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-i} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{j!}{k!(j-k)!} = \binom{j}{i} \sum_{k=i}^{j} (-1)^{k-i} \binom{j-i}{k-i}.$$
Ainsi lorsque $i > j$, on obtient 0. Lorsque $i = j$, on trouve 1. Enfin si $i < j$, on reconnait la formule du Binôme de Newton : $\binom{j}{i}(1-1)^{j-i} = 0$. On obtient bien les coefficients de la matrice I_{n+1}.

(b) On a :$[T^{-1}AT]_{i+1,j+1} = \sum_{k=i}^{n} \sum_{l=k}^{n} \binom{k}{i} \frac{1}{l+1} (-1)^{j-l} \binom{j}{l} = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=i}^{l} \binom{k}{i} \frac{1}{j+1} (-1)^{j-l} \binom{j+1}{l+1}$
$= \frac{1}{j+1} \sum_{l=0}^{n} \binom{l+1}{i+1} (-1)^{j-l} \binom{j+1}{l+1}$. Le second facteur correspond à la matrice TT^{-1}. Ainsi on trouve la matrice diagonale $D = diag(1, 1/2, 1/3, ..., 1/(n+1))$.

(c) On a $W_k = A^k W_0$ car la suite est géométrique. Puis $A = TDT^{-1}$, donc $A^k = TD^kT^{-1}$ avec $D^k = diag(1, 2^{-k}, ..., (n+1)^{-k})$. Or $W_0 = (0, ..., 0, 1)$, donc on obtient bien : $W_k = TD^kT^{-1}W_0$ et : $\mathbb{P}(X_k = j) = \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} \frac{1}{(1+i+j)^k}$

(d) Lorsque k tend vers l'infini, toutes les proba tendent vers 0, sauf $\mathbb{P}(X_k = 1) \to 1$. Ainsi on obtient presque sûrement pour k, le fait que l'on effectuera tout les tirages dans la première urne qui contient uniquement son propre numéro. On converge ainsi vers le point fixe de l'expérience.