Semaine 29 - Du 2 au 6 Juin 2025

Correspondance entre applications linéaires et matrices

Noyau, image et rang d'une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
Définitions des noyau, image et rang comme ceux de l'application associée.
Théorème du rang. Caractérisation des matrices inversibles.

Généralités

Matrice d'une application linéaire dans des bases.
L'application $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) \to \mathcal{M}_{\dim(F),\dim(E)}(\mathbb{K}), f \mapsto Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ est un isomorphisme.
Formule entre composition des morphismes et produit des matrices associées.
Une application est un isomorphisme ssi sa matrice est inversible.

Changement de bases

Matrices de passage entre deux bases d'un même espace.
Les matrices de passage sont inversibles et inverses l'une de l'autre.
Formule de changement de bases sur les matrices. Cas des endomorphismes.

Déterminants

Généralités

Définition : Il existe une unique (admis) application unitaire, multilinéaire et alternée.
Exemple du cas $n = 2$ avec l'interprétation d'aire orientée.
Règle de Sarrus pour le cas $n = 3$ et l'interprétation de volume orienté.

Propriétés des déterminants

Effets des transvections, dilatations et permutations de colonnes sur le déterminant.
Déterminant d'une matrice triangulaire. Formule homogénéité : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
Caractérisation des matrices inversibles par le déterminant.
Déterminants d'un produit de matrices et de l'inverse d'une matrice inversible.
Effets des transvections, dilatations et permutations de lignes sur le déterminant.
Déterminant de la transposé d'une matrice.

Développement par rapport à une ligne ou colonne

Mineurs d'ordre $p < n$, Cofacteurs et Comatrice d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Calcul de l'inverse par la comatrice. (Admis)
Formule de développement : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0} Cof_{i,j_0}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} Cof_{i_0,j}(A)$.

Liste de Questions de cours :

a) Montrer que $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) \to \mathcal{M}_{\dim(F),\dim(E)}(\mathbb{K}), \varphi \mapsto Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.
b) Montrer que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g)\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$.
c) Démontrer que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
d) Calculer le déterminant de Vandermonde $\det(C_1, ..., C_n)$ avec $C_k = (1, x_k, ..., x_k^{n-1})^T$.
e) Calculer $\chi_A = \det(XI_3 - A)$ pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par l'examinateur.
f) Montrer que le polynôme caractéristique d'un projecteur est $\chi_p = (X-1)^r X^{n-r}$.

Exercices d'Application du Cours

1. Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, u \mapsto u \wedge v$.
   (a) Justifier que f est linéaire et déterminer sa matrice A dans la base canonique.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de f.
   (c) Calculer $\chi_A = \det(XI_3 - A)$ et trouver les racines sur $\mathbb{C}$.
2. On considère $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P'(X) + \frac{1}{6}X^3P(0)$.
   (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Déterminer sa matrice A dans la base canonique.
   (c) Calculer $\chi_A = \det(XI_4 - A)$ et montrer que c'est un polynôme annulateur.
   (d) En déduire que f est un isomorphisme et préciser sa réciproque.

Devoir libre

On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+2y+z \\ -x-z \\ x+2y+3z \end{pmatrix}$.

1. On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme de degré 2 annulant la matrice A.
   (c) La matrice est-elle inversible ? Dans ce cas calculer A^{-1}.
2. Calcul des éléments propres
   (a) Montrer que s'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$ alors $u = 0_3$ ou $\lambda = 2$.
   (b) Résoudre l'équation $f(u) = 2u$ sous la forme paramétrique $u \in Vect(u_1, u_2)$ avec des vecteurs u_1 et u_2 à déterminer.
3. On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et préciser la matrice de passage P.
   (b) Calculer P^{-1}.
   (c) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $Au_3 = 2u_3 + au_1 + bu_2$.
4. On pose $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer T^n.
   (b) Montrer que $A = PTP^{-1}$ et en déduire A^n.
   (c) Calculer $f^n(u_1), f^n(u_2)$ et $f^n(u_3)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.