DS de Mathématiques n^o 11

Exercice 1 : 1. (a) On a $M^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = M$ donc $f^2 = f$ et f est un projecteur.

Puis $rg(f) = rg(M) = 1$ car les colonnes sont colinéaires.

(b) On a $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} M = \mathrm{Vect}\ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} M = \mathrm{Vect}\ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

2. (a) <u>ss-ev</u> On a D est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 1.

Puis $P = \mathrm{Vect}\ \left(\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

<u>dimension</u> En particulier : $\dim D + \dim P = \dim E$.

<u>somme directe</u> Soit $u \in D \cap P$.

On a $u = \lambda \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\lambda(1 + 6 - 1) = 0$ donc $\lambda = 0$ puis $u = 0_E$.

<u>conclusion</u> Donc $E = D \oplus P$.

(b) On résout $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = a \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + b \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ à l'aide du pivot de Gauss-Jordan.

On trouve $a = \dfrac{x + 2y + z}{6}$, $b = \dfrac{-x - z}{2}$ et $c = \dfrac{x + 2y + 7z}{6}$.

Puis $p \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = b \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2b-c \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{1}{6} \left(\begin{smallmatrix} 5x-2y-z \\ -3x-3z \\ x+2y+7z \end{smallmatrix}\right)$.

Donc la matrice est $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

3. (a) Il suffit de proposer deux des trois arguments suivants pour montrer $E = \mathrm{Ker} p \oplus \mathrm{Im} p$.

<u>somme directe</u> Soit $u \in \mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Im} p$.

Il existe $x \in E, u = p(x) \in \mathrm{Im} p$.

Ainsi $u = p^2(x) = p(p(x)) = p(u) = 0_E$ car $u \in \mathrm{Ker} p$.

<u>somme totale</u> Puis $u = u - p(u) + p(u) \in \mathrm{Ker} p + \mathrm{Im} p$ car $p[u - p(u)] = p(u) - p^2(u) = 0$.

<u>dimension</u> On a $\dim(\mathrm{Ker} p) + \dim(\mathrm{Im} p) = n$ d'après le théorème du rang.

(b) <u>1er méthode algébrique</u>

On a q linéaire puis $q^2 = id_E - 2p + p^2 = id_E - p = q$ car $p^2 = p$.

Donc q est un projecteur.

On a $q(u) = 0$ ssi $u - p(u) = 0$ ssi $u \in \mathrm{Im} p$. Donc $\mathrm{Ker} q = \mathrm{Im} p$.

Puis $q(u) = u$ ssi $u - p(u) = u$ ssi $p(u) = 0$. Donc $\mathrm{Im} q = \mathrm{Ker} p$.

<u>2eme méthode géométrique</u>

On sait que $p : x = x_1 + x_2 \mapsto x_1$ avec $x_1 \in \mathrm{Im} p$ et $x_2 \in \mathrm{Ker} p$.

Ainsi $q(x) = x - x_1 = x_2$ i.e. $q : x = x_1 + x_2 \mapsto x_2$.

Donc q est le projecteur sur $E_2 = \mathrm{Ker} p$ le long de $E_1 = \mathrm{Im} p$.

4. (a) Pour $u \in \mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Ker}(p_2)$. On a $p_1(u) = p_2(u) = 0$.

Donc $q(u) = p_1(u) + p_2(u) - p_2(p_1(u)) = 0 + 0 - p_2(0) = 0$ i.e. $u \in \mathrm{Ker} q$.

(b) Pour $v = q(u) \in \mathrm{Im} q$. On a $v = p_1(u) + [p_2(u) - p_2(p_1(u))] \in \mathrm{Im} p_1 + \mathrm{Im} p_2$. car $p_1(u) \in \mathrm{Im} p_1$ et $p_2(u) - p_2(p_1(u)) = p_2(u - p_1(u)) \in \mathrm{Im} p_2$.

(c) On a q linéaire par opération sur les endomorphismes.

On calcul l'itéré avec des endomorphismes qui commutent :

$q^2 = p_1^2 + p_2^2 + (p_1 \circ p_2)^2 + 2p_1 \circ p_2 - 2p_1 \circ (p_1 \circ p_2) - 2(p_1 \circ p_2) \circ p_2$
$= p_1 + p_2 + p_1 \circ p_2 + 2p_1 \circ p_2 - 2p_1 \circ p_2 - 2p_1 \circ p_2$ car $p_1^2 = p_1$ et $p_2^2 = p_2$.
$= p_1 + p_2 - p_1 \circ p_2 = q$.
Donc q est un projecteur.

(d) On recherche à montrer que les inclusions précédentes sont des égalités.
Soit $u \in \mathrm{Ker} q$. On a $0 = q(u) = p_1(u) + p_2(u) - p_2(p_1(u))$.
En composant avec p_1, on a $0 = p_1(0) = p_1(p_1(u)) + p_1(p_2(u)) - p_1(p_1(p_2(u))) = p_1(u)$. Ainsi $u \in \mathrm{Ker}(p_1)$.
De même en composant avec p_2, on trouve $0 = ... = p_2(u)$ donc $u \in \mathrm{Ker} p_2$.
On en déduit par double inclusion $\mathrm{Ker} q = \mathrm{Ker} p_1 \cap \mathrm{Ker} p_2$.
On sait que $u \in \mathrm{Im} q$ ssi $u = q(u)$.
Soit $u = u_1 + u_2 \in \mathrm{Im} p_1 + \mathrm{Im} p_2$. On a $q(u) = p_1(u_1+u_2) + p_2(u_1+u_2) - p_1(p_2(u_1+u_2))$
$= u_1 + p_1(u_2) + p_2(u_1) + u_2 - p_2(p_1(u_1)) + p_1(p_2(u_2)) = u_1 + u_2 = u$. Donc $u \in \mathrm{Im} q$.
Par double inclusion, on a $\mathrm{Im} q = \mathrm{Im} p_1 + \mathrm{Im} p_2$.

Exercice 2 : 1. (a) Par récurrence double, on trouve $\deg T_n = n, T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ et le coefficient dominant est 2^{n-1}.

(b) On note $\mathcal{T} = (T_k)_{0 \leq k \leq n}$ la famille. Elle est échelonnée en degré donc libre. On a $\mathrm{Card}\, \mathcal{T} = n + 1 = \dim \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
Donc $\mathcal{T}$ est une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

(c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
L'initialisation est claire pour $n = 0$ et $n = 1$.
Puis

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta \\ &= \cos[\theta + (n+1)\theta] + \cos[\theta - (n+1)\theta] - \cos n\theta \\ &= \cos(n+2)\theta. \end{aligned}$$

(d) Soit $x \in [-1, 1]$. On le paramétrise par $x = \cos\theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$.
On résout $T_{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow T_{n+1}(\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(n+1)\theta = 0$
$\Leftrightarrow (n+1)\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n+2}$ pour $0 \leq k \leq n$.
Donc on obtient $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)$ qui sont $n+1$ racines distinctes d'un polynôme de degré $n+1$. Donc ce sont toutes les racines du polynôme et elles sont dans l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

(e) On a $T_{n+1} = 2^n X^{n+1} + ...$ La somme des racines est donné par la coefficient de X^n qui est nul par parité du polynôme. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k = 0$.
Le produit est donné par le coefficient constant $T_n(0)$. Or $T_{n+2}(0) = -T_n(0)$ avec $T_0(0) = 1$ et $T_1(0) = 0$.
Donc pour $n+1$ impair $T_{n+1}(0) = 0$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} x_k = 0$.

Pour $n+1=2k$ pair $T_{2k}(0)=(-1)^k$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} x_k = \frac{(-1)^{2k}}{2^n}(-1)^k = 2^{-n}(-1)^{(n-1)/2}$.

2. (a) On distingue deux cas. Si $k=l$ alors $L_k(x_k) = \displaystyle\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i} = 1$.

   Si $k \neq l$ alors $L_k(x_l) = 0$ car $(X - x_l)$ est un facteur et donc x_l une racine.

   (b) La famille est du bon cardinal. Puis pour $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k(X) = 0$.

   En prenant $X = x_l$, on trouve l'équation $\lambda_l = 0$ d'après la question précédente.
   Donc la famille est libre, c'est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (c) On a $T_k(X) = \displaystyle\sum_{l=0}^{n} \lambda_l L_l(X)$ car $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base.

   De même, on trouve $T_k(x_l) = \lambda_l$ or $x_l = \cos\left(\dfrac{(2l+1)\pi}{2n+2}\right)$ et $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$.
   Donc $\lambda_l = \cos\dfrac{k(2l+1)\pi}{2n+2}$. Puis $M = \left(\cos\dfrac{k(2l+1)\pi}{2n+2}\right)_{0\leq k,l\leq n}$

3. (a) On a $T_2(X) = 2X^2 - 1$ et $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.
   Puis $x_0 = -\sqrt{3}/2$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \sqrt{3}/2$.

   (b) La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

   Et à l'aide du pivot de Gauss-Jordan $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & \sqrt{3}/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & -\sqrt{3}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : 1. Par opération la fonction est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
Seul le point $x=0$ pose problème. La fonction racine est continue mais pas dérivable en 0.
Donc on en déduit déjà la continuité de f en 0.
Pour $x>0$, $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}) \sim_{x\to 0} \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x} = \dfrac{-1}{2}$.
Donc $\lim\limits_{0} f' = \dfrac{-1}{2}$ ainsi f est de classe C^1 en 0 et $f'(0) = \dfrac{-1}{2}$.

2. On peut faire un $DL_1(0)$ de la fonction f'.
On a $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$
$=_{x\to 0} \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - \dfrac{(\sqrt{x})^3}{6} + o(x^{3/2}\right)$ avec un $DL_3(0)$ de sin.
$=_{x\to 0} \dfrac{-1}{2} + \dfrac{1}{12}x + o(x)$.
Donc f' est dérivable en 0 et $f''(0) = \dfrac{1}{12}$.

3. Pour $x>0$, $f''(x) = (-1/2)^2 x^{-3/2}\sin(\sqrt{x}) + (-1/2)x^{-1/2} \times (1/2)x^{-1/2}\cos(\sqrt{x})$

$= \dfrac{1}{4x\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}) - \dfrac{1}{4x} \cos(\sqrt{x})$

Donc on en déduit que pour $x > 0, 4xf''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$.

Reste à le démontrer en $x = 0$. On a $0f''(0) + 2f'(0) + f(0) = 2\dfrac{-1}{2} + 1 = 0$.

4. On pose $g(x) = 4xf''(x)+2f'(x)+f(x)$. On sait que g de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ par opération. On dérive $n-1$ fois la fonction g.
   Donc $g^{(n-1)}(x) = 4(xf''(x))^{(n-1)} + 2f^{(n)}(x) + f^{(n-1)}(x)$.
   Puis on utilise la formule de Leibniz :
   $(xf''(x))^{(n-1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{(k)}(f'')^{(n-1-k)}(x) = xf^{(n+1)}(x)+(n-1)f^{(n)}(x)+0+...+0.$
   Ainsi $g^{(n-1)}(x)4xf^{(n+1)}(x) + (4n-2)f^{(n)}(x) + f^{(n-1)}(x) = 0$ car $g(x) = 0$.
5. On montre par récurrence double sur $n \geq 1$ que $f^{(n)}(x) \to_{x\to+\infty} 0$.
   Pour $n = 0, f(x) = \cos(\sqrt{x})$ est bornée mais ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
   Pour $n = 1, f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}) =_{+\infty} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \to 0$.
   Pour $n = 2, f''(x) = \dfrac{-1}{4x}(2f'(x) + f(x)) = O\left(\dfrac{1}{x}\right) \to 0$.
   Pour $n+1 \geq 3, f^{(n+1)}(x) = \dfrac{-1}{4x}\Big((4n-2)f^{(n)}(x) + f^{(n-1)}(x)\Big) \to 0$ par hypothèse de récurrence.
6. On sait que $h = |f^{(n)}|$ est non nulle donc il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\varepsilon = h(c) > 0$.
   Puis par définition de $\lim\limits_{+\infty} h = 0$, on qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq M, h(x) \leq \varepsilon$.
   Donc $\sup\limits_{[M,+\infty[} h \leq \varepsilon = h(c)$.
   On pose $a = 0$ et $b = \max(M, c)$. La fonction h est continue sur le segment $[a, b]$ donc h atteint ses bornes. On note $x_n \in [a, b]$ tel que $h(x_n) = \sup\limits_{[} a, b]h$.
   Comme $c \in [a, b]$ alors $h(c) \leq \sup\limits_{[} a, b]h$.
   Ainsi $\sup\limits_{\mathbb{R}_+} h = \max(\sup\limits_{[a,b]} h, \sup\limits_{[M,+\infty[h}) = \sup\limits_{[} a, b]h = h(x_n)$.
7. Si $f^{(n)}$ atteint un extremum en x_n $\in]0, +\infty[$ alors c'est un point critique et alors $f^{(n+1)}(x_n) = 0$.
   Si $x_n = 0$ alors on ne sait pas si $f^{(n+1)}(x_n) = 0$ car le point critique n'est pas intérieur mais $4x_nf^{(n+1)}(x_n) = 0$.
   Donc la relation devient dans les deux cas : $(4n-2)f^{(n)}(x_n) + f^{(n-1)}(x_n) = 0$. Ceci permet de faire une récurrence simple en remarquant que $|f^{(n-1)}(x_n)| \leq \sup\limits_{\mathbb{R}_+} |f^{(n-1)}|$.
   Pour $n = 0, \sup\limits_{\mathbb{R}_+} |f| = \sup|\cos| = 1 = \dfrac{0!}{0!}$.
   Pour $n = 1, \sup\limits_{\mathbb{R}_+} |f'| \leq \dfrac{1}{2} = \dfrac{1!}{2!}$ et il est atteint en $x_1 = 0$.

Pour $n \geq 2, \sup\limits_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| = \left| \frac{-1}{4n-2} f^{(n-1)}(x_n) \right| \leq \frac{1}{2(2n-1)} \sup\limits_{\mathbb{R}_+} |f^{(n-1)}|$
$\leq \frac{n}{2n(2n-1)} \frac{(n-1)!}{(2n-2)!} = \frac{n!}{(2n)!}$.

Exercice 4 : 1. La fonction tangente hyperbolique est C^∞ par opération et $\text{th}\,'(x) = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} < 1$ donc par le IAF on a pour tout $x > 0$, on a $\text{th}\, x = |\text{th}\,(x) - \text{th}\,(0)| < 1.|x-0| = x$.

2. On a $f'(x) = \text{sh}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\text{ch}\,\frac{1}{x} < 0$ pour $x > 0$.
   Puis on remarque que $f(-x) = f(x)$ donc la fonction est paire.
   Ainsi elle est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   De plus $f(x) = x\text{sh}\,\frac{1}{x} \sim_{x\to\infty} x\frac{1}{x} = 1$.
   Donc les limites en $\pm\infty$ sont 1.
   De plus, $f(x) \sim_{x\to 0} xe^{\frac{1}{|x|}}/2 \to +\infty$.
3. On a : $\frac{\text{sh}\,u}{u} =_{u\to 0} \frac{1}{u}(u + u^3/6 + o(u^3)) = 1 + u^2/6 + o(u^2)$.
4. En posant $x = \frac{1}{u}$ on trouve donc $f(x) =_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
5. On applique le théorème de la bijection continue f est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{n+1}{n} \in]1, +\infty[$ donc $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution $u_n > 0$.
6. D'après le théorème de la bijection f^{-1} est décroissante car f l'est. Donc $u_n = f^{-1}(\frac{n+1}{n})$ est croissante car la suite $\frac{n+1}{n}$ décroit.
7. Par l'absurde comme la suite (u_n) croit alors elle aurait une limite finie l vérifiant car f est continue : $f(l) = 1$ ce qui est absurde d'après ce qui précède.
8. Comme $u_n \to +\infty$ on peut composer avec le développement asymptotique et on trouve : $\frac{n+1}{n} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o(u_n^{-2})$ puis $\frac{1}{6u_n^2} \sim \frac{n+1}{n} - 1 \sim \frac{1}{n}$ donnant $u_n \sim \sqrt{\frac{n}{6}}$.

Exercice 5 : d'après Centrale-Supélec 2016 - Math 2-TSI

1. (a) On a $a_0 = 0, b_0 = 1$ et $c_0 = 0$ d'après l'énoncé.
   (b) On a $\{A_n, B_n, C_n\}$ forment un SCEI donc $a_n + b_n + c_n = 1$.
   (c) Si un joueur possède les deux ballons, la partie s'arrête et il conserve les ballons $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1$.
   Si deux voisins possèdent les ballons alors il n'y a pas de joueur qui serait un voisin commun et $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = 0$.
   Sinon parmi les 4 possibilités (gauche/droite) une seule envoie le ballon à un même joueur donc $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$.
2. (a) En appliquant la FPT sur le SCEI $\{A_n, B_n, C_n\}$, on a :

$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = a_n + \frac{1}{4}c_n$.

De même, on montre que $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = 0$, $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$ $\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$ $\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{2}{4}$.

La FPT montre alors $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$.

(b) Les relations de récurrence se note $U_{n+1} = MU_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(c) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $U_n = M^n U_0$.

3. (a) On a $b_{n+2} - \frac{5}{4}b_{n+1} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} - \frac{5}{4}b_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right)$ $= -\frac{5}{16}b_n$.

(b) On reconnaît une SRL2. Le polynôme caractéristique est $q^2 - \frac{5}{4}q + \frac{5}{16} = 0$ avec $\Delta = \frac{25}{16} - \frac{20}{16} = \frac{5}{16}$.

Donc $q = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$. Puis $b_n = \lambda_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n$.

Les conditions $b_0 = 1$ et $b_1 = \frac{3}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 = \frac{3}{4}$ donnent $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ et $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$.

Donc $b_n = \frac{8}{10}\left(\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^{n+1} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^{n+1}\right)$.

(c) La relation $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ donne

$c_n = 4b_{n+1} - 3b_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n - \left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n)$.

La relation $a_n + b_n + c_n = 1$ donne $a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n$ $- \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n$.

(d) On a $0 < 5 - \sqrt{5} < 5 + \sqrt{5} < 8$ car $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3 = 8 - 5$. Donc $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n \to 0$ et $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n \to 0$.

Ainsi $a_n \to 1$, $b_n \to 0$ et $c_n \to 0$.

La partie s'arrête presque sûrement.

4. (a) L'évènement $(X \leq n)$ signifie que la partie s'est arrêtée avant le rang n donc qu'un

joueur possède le ballon à la n-ième étape. Ainsi $A_n = (X \leq n)$ et $\mathbb{P}(X \leq n) = a_n$.

On en déduit $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \leq n) - \mathbb{P}(X \leq n-1) = a_n - a_{n-1} = \dfrac{1}{4}c_{n-1}$

$== \dfrac{\sqrt{5}}{20}(\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^{n-1})$.

(b) Notons $q_+ = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$ et $q_- = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$.

On a $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)n = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} nq_+^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} nq_-^{n-1}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{20}\left(\dfrac{1}{(1-q_+)^2} - \dfrac{1}{(1-q_-)^2}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{20}\left(\dfrac{32}{7-3\sqrt{5}} - \dfrac{32}{7+3\sqrt{5}}\right) = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{49-45}\right) = 12.$

Donc la partie s'arrête au bout de 12 tours en moyenne.