

Devoir Surveillé de Mathématiques n° 11
le jeudi 5 Juin 2025 - durée 4h

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel réel de dimension finie n .

On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Dans cette question $n = 2$.

On considère f l'application linéaire dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang ?
- (b) Déterminer le noyau et l'image de f .

2. Dans cette question $n = 3$.

On considère $D = \text{Vect}(e_1 + 3e_2 - e_3)$ et $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E \text{ tel que } x + 2y + z = 0 \right\}$.

- (a) Montrer que D et P sont supplémentaires dans E .
- (b) Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ du projecteur sur P le long de D .

3. On suppose désormais que n est quelconque et on considère p un projecteur de E .

- (a) Démontrer le résultat de cours " $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ ".
- (b) Montrer que $q = \text{id}_E - p$ est un projecteur.
Déterminer ses espaces propres en fonction de ceux de p .

4. Soit p_1 et p_2 deux projecteurs de E et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

- (a) Montrer que $\text{Ker}(p_1) \cap \text{Ker}(p_2) \subset \text{Ker}(q)$.
- (b) Montrer que $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)$.
- (c) On suppose désormais que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$. Montrer que q est un projecteur.
- (d) Déterminer les espaces propres de q en fonction de ceux de p_1 et p_2 .

Exercice 2 : 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la famille des polynômes de Tchebychev définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ puis } T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

- (a) Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_n .
- (b) Montrer que la famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (c) Montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.
- (d) En déduire que T_{n+1} admet $n+1$ racines réelles distinctes dans $] -1, 1[$.

On les note $-1 < x_0 < x_1 < \dots < x_n < 1$.

- (e) Montrer que $\sum_{k=0}^n x_k = 0$ et que $\prod_{k=0}^n x_k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 2^{-n}(-1)^{(n-1)/2} & \text{sinon} \end{cases}$

2. On définit $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange aux valeurs $\{x_0, \dots, x_n\}$ par :

$$L_k(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

- (a) Pour tous les indices $0 \leq k, l \leq n$, calculer $L_k(x_l)$.
- (b) En déduire que la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (c) Montrer que la matrice de passage entre les bases $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est :

$$M = \left(\cos \frac{k(2l+1)\pi}{2n+2} \right)_{0 \leq k, l \leq n}$$

3. On suppose désormais que $n = 2$.

- (a) Déterminer $T_3(X)$ et ses racines $\{x_0, x_1, x_2\}$.

(b) Déterminer la matrice M et calculer son inverse M^{-1} .

Exercice 3 : Soit $n \geq 1$. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f' est dérivable en 0 et préciser $f''(0)$.

On admet, dans la suite, que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $4xf''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$.
4. En déduire que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $4xf^{(n+1)}(x) + (4n-2)f^{(n)}(x) + f^{(n-1)}(x) = 0$.
5. Montrer que, $f^{(n)}(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$.
6. En déduire qu'il existe $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f^{(n)}(x_n)| = \sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}|$.
7. Montrer par récurrence que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{(2n)!}$.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \operatorname{sh} \frac{1}{x}$.

On définit la tangente hyperbolique par : $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\operatorname{th}'(x) < 1$ et en déduire que $\operatorname{th}(x) < x$.
2. En déduire le tableau de variations de f . On précisera les limites aux bornes.
3. Donner le développement limité à l'ordre 2 en $u \rightarrow 0$ de $\frac{\operatorname{sh} u}{u}$.
4. En déduire que f admet au voisinage de $+\infty$ un développement asymptotique de la forme :

$$f(x) =_{x \rightarrow +\infty} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

où a_0, a_1, a_2 sont des réels que l'on précisera.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x_n) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution $x_n > 0$.
6. Montrer que la suite $(x_n)_{n>0}$ est croissante.
7. Montrer que la suite $(x_n)_{n>0}$ tend vers $+\infty$.
8. Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 : Cinq amis sont en cercle et se lancent deux ballons. A chaque tour le joueur ayant un ballon peut choisir de l'envoyer à son voisin de droite ou de gauche. Les deux ballons sont envoyés simultanément. La partie s'arrête lorsque l'un des joueurs reçoit en même temps les deux ballons. Au début de la partie, les joueurs avec les ballons sont voisins l'un de l'autre. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les événements suivants :

- A_n = "Après n tours de jeux, un joueur possède les deux ballons".
- B_n = "Après n tours de jeux, deux voisins possèdent les ballons".
- $C_n = A_n \cap B_n$.

Enfin, on note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1. (a) Préciser les valeurs de a_0, b_0 et c_0 .
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n + c_n = 1$.
(c) Justifier que $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1$ et calculer $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$.
2. (a) Montrer que $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n$, $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$.
(b) On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Donner une matrice M telle que $U_{n+1} = MU_n$.
(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$.
3. (a) Montrer que $b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n$.
(b) En déduire la valeur de b_n en fonction de n .
(c) Calculer les valeurs de a_n et c_n en fonction de n .
(d) Préciser les limites des trois suites. Quelle interprétation peut-on en déduire sur le jeu ?
4. On note X la variable aléatoire du nombre de tours de jeu avant l'arrêt de la partie.
(a) Montrer que $\mathbb{P}(X \leq n) = a_n$. En déduire la loi de X .
(b) On admet la formule suivante $\sum_{n \in \mathbb{N}} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$. Quelle interprétation peut-on en déduire sur le jeu ?