Symétrie orthogonale

On considère $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+2y+2z \\ 2x+y-2z \\ 2x-2y+z \end{pmatrix}$.

1. Montrer que s est une symétrie vectorielle.
2. Déterminer ses espaces propres $E_1 = \text{Ker}(s - id_E)$ et $E_2 = \text{Ker}(s + id_E)$.
3. Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$ compatible à cette décomposition. Ecrire la matrice de passage P avec la base canonique $\mathcal{B}_0$.
5. On note $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(s)$ et $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$. Préciser le lien entre les matrices S, D et P .

Que peut-on remarquer sur leurs transposées S^T, D^T et P^T ?

1. s est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus $S^2 = I_3$. Donc s est un endomorphisme qui vérifie $s^2 = id_E$.

C'est à dire une symétrie vectorielle.

2. On a $S - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $E_1 = \text{Ker}(s - id_E) = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

De même $S + I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $E_2 = \text{Ker}(s + id_E) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. D'après le cours sur les symétries vectorielles, on a déjà $E = E_1 \oplus E_2$. Il suffit d'avoir $E_1 \perp E_2$. Notons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base de E_1 . Notons $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base de E_2 . On a $e_3 \perp e_1$ et $e_3 \perp e_2$ (par calcul immédiat).

On en déduit que $e_3 \in \text{Vect}(e_1, e_2)^\perp$ puis que $E_2 = \text{Vect}(e_3) \subset E_1^\perp$.

Il y a donc égalité $E_2 = E_1^\perp$ par dimension.

4. On a $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2)$. On orthonormalise cette base de E_1 .

On en déduit $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même $E_2 = \text{Vect}(e_3)$. On en déduit $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $P = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

5. On a $S = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(1, 1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On remarque que $S^T = S$ et $D^T = D$ sont des matrices symétriques.

Et $P^{-1} = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = P^T$ est une matrice orthogonale.