Semaine 1 - Du 15 au 19 Septembre 2025

Eléments de logique et de calcul

Assertions et assemblage

Négation, disjonction et conjonction, implication et équivalence.
Prédicat et quantificateurs : $\exists, \forall$ et $\exists!$.
Raisonnement par double implication, par l'absurde et par contraposée.

Raisonnement par récurrence

Somme et produit itérées

Définition, règles de calcul et télescopage.
Formule du binôme de Newton. Somme des termes d'une suite géométrique.
Somme des entiers, des carrés et des cubes.

Résolution de systèmes

Méthode du pivot pour la résolution des systèmes linéaires. (On se limite à 3 inconnues)
Résolution des système somme-produit à l'aide du polynôme $X^2 - SX + P$.

Inégalités

Résolution par étude de signes. Inégalité triangulaire.

Trigonométrie

Formules fondamentale, d'addition et d'arc double.
Formules de linéarisation et de factorisation.

Liste de Questions de cours :

1. Enoncer puis démontrer la formule de somme des carrés :$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Enoncer puis démontrer la formule de factorisation : $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
3. Enoncer puis démontrer la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
4. Montrer que $\forall 0 \leq p \leq n, \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
5. Montrer que $\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

Exercices d'Application du Cours

1. On considère la suite définie par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n$.
2. Calculer les sommes et produits suivants :
   (a) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$
   (b) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(2i+1)$
   (c) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inégalités suivantes :
   (a) $|2x+1| < |x-1|$
   (b) $2 + \sqrt{2x-1} < x$

Devoir libre

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $x \in \mathbb{R}$ un réel.
   (a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$.
   (b) Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et en déduire que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx$.
   (c) En adaptant la méthode, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.
   (d) Montrer que $\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

2. Pour $x \in [0,1]$ un réel, on note $S(x) = \sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.
   On considère $A = \left\{k \in [\![1,n]\!] \text{ tel que } \left|x-\frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$.
   (a) Montrer que $\sum_{k\in A}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
   (b) Montrer que $\sum_{k\notin A}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.
   (c) En déduire que $S(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}$.