Semaine 0 - Du 8 au 12 Septembre 2025

Eléments de logique et de calcul

Assertions et assemblage

Négation, disjonction et conjonction, implication et équivalence.
Prédicat et quantificateurs : $\exists, \forall$ et $\exists!$.
Raisonnement par double implication, par l'absurde et par contraposée.

Raisonnement par récurrence

Somme et produit itérées

Définition, règles de calcul et télescopage.
Formule du binôme de Newton. Somme des termes d'une suite géométrique.
Somme des entiers, des carrés et des cubes.

Liste de Questions de cours :

1. Enoncer puis démontrer la formule de somme des carrés :$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Enoncer puis démontrer la formule de factorisation : $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
3. Enoncer puis démontrer la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
4. Montrer que $\forall 0 \leq p \leq n, \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
5. Montrer que $\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

Exercices d'Application du Cours

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2x+1}+1=x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|x-1|+|2x+1|=m$ en fonction de $m \in \mathbb{R}$.
3. On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0=0, F_1=1$ et $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.

Devoir libre

1. Soient $A, B \in \mathbb{R}^*$. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0=0, u_1=1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2}=Au_{n+1}+Bu_n.$$

   On considère le polynôme $P(X)=X^2-AX-B$ et on note Δ son discriminant.

   (a) On suppose que $\Delta=0$.
      i. Montrer que $B=-(A/2)^2$.
      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n=n(A/2)^{n-1}$.

   (b) On suppose que $\Delta>0$.
      i. Déterminer les racines $\alpha_1>\alpha_2$ de P en fonction de A et B.
      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n=(\alpha_1^n-\alpha_2^n)/\sqrt{\Delta}$.
      iii. En déduire une expression explicite de la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par : $F_0=0, F_1=1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

   (c) On suppose désormais $A=2$ et $B=-2$.
      Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n=2^{n/2}\sin(n\pi/4)$.