Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soient $A, B \in \mathbb{R}^*$. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n.$$

On considère le polynôme $P(X) = X^2 - AX - B$ et on note Δ son discriminant.

1. On suppose que $\Delta = 0$.
   (a) Montrer que $B = -(A/2)^2$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n(A/2)^{n-1}$.
2. On suppose que $\Delta > 0$.
   (a) Déterminer les racines $\alpha_1 > \alpha_2$ de P en fonction de A et B.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha_1^n - \alpha_2^n)/\sqrt{\Delta}$.
   (c) En déduire une expression explicite de la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par : $F_0 = 0, F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
3. On suppose désormais $A = 2$ et $B = -2$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n/2}\sin(n\pi/4)$.

1. (a) On a $\Delta = A^2 - 4(-B) = A^2 + 4B = 0$.
   Donc $B = -A^2/4 = -(A/2)^2$.
   (b) On démontre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = n(A/2)^{n-1}$.
   <u>Initialisation :</u> Pour $n = 0, u_0 = 0$ et pour $n = 1, u_1 = 1 = (A/2)^0$.
   <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = n(A/2)^{n-1}$ et $u_{n+1} = (n+1)(A/2)^n$.
   On calcul $u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n = A(n+1)(A/2)^n - (A/2)^2 n(A/2)^{n-1}$ par H.R.
   $= (A/2)^{n+1}\left(2(n+1) - n\right) = (n+2)(A/2)^{n+1}$.
   <u>Conclusion :</u> $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n(A/2)^{n-1}$.
2. (a) Les racines du polynôme sont : $\alpha_1 = \frac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{A-\sqrt{A^2+4B}}{2}$.
   (b) On démontre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = (\alpha_1^n - \alpha_2^n)/\sqrt{\Delta}$.
   <u>Initialisation :</u> Pour $n = 0, u_0 = 0 = (1-1)/\sqrt{\Delta}$ et pour $n = 1, u_1 = 1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\Delta}}$.
   <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = (\alpha_1^n - \alpha_2^n)/\sqrt{\Delta}$ et $u_{n+1} = (\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1})/\sqrt{\Delta}$.
   On calcul $u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n$
   $= A(\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1})/\sqrt{\Delta} + B(\alpha_1^n - \alpha_2^n)/\sqrt{\Delta}$ par H.R.
   $= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[\alpha_1^n(A\alpha_1 + B) - \alpha_2^n(A\alpha_2 + B)\right]$
   $= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[\alpha_1^{n+2} - \alpha_2^{n+2}\right]$.
   En effet, $P(\alpha_k) = \alpha_k^2 - A\alpha_k - B = 0$ donc $\alpha_k^2 = A\alpha_k + B$ pour $k = 1$ ou $k = 2$.
   <u>Conclusion :</u> $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha_1^n - \alpha_2^n)/\sqrt{\Delta}$.
   (c) Les racines de $P(X) = X^2 - X - 1$ sont $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ avec $\Delta = 5$. Donc on trouve pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.
3. On démontre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = 2^{n/2}\sin(n\pi/4)$.
   <u>Initialisation :</u> Pour $n = 0, u_0 = 0 = \sin(0)$ et pour $n = 1, u_1 = 1 = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^{n/2}\sin(n\pi/4)$
   et $u_{n+1} = 2^{(n+1)/2}\sin((n+1)\pi/4)$.
   Notons $\theta = (n+2)\pi/4$ pour simplifier la lecture des calculs.
   On a : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n = 2^{(n+3)/2}\sin((n+1)\pi/4) - 2^{(n+2)/2}\sin(n\pi/4)$
   $= 2^{(n+2)/2}\left(\sqrt{2}\sin(\theta - \pi/4) - \sin(\theta - \pi/2)\right)$
   $= 2^{(n+2)/2}(\sin\theta - \cos\theta - 0 + \cos\theta) = 2^{(n+2)/2}\sin\theta$.
   <u>Conclusion :</u> $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n/2}\sin(n\pi/4)$.