Eléments de logique et de calcul

Révision de la semaine 1

Les nombres complexes

Généralités

Addition et produit dans $\mathbb{C}$, forme algébrique (ou cartésienne), parties réelle et imaginaire.
Conjugaison : compatibilité aux opérations.

Module

Définition via la forme algébrique et expression à l'aide du conjugué.
Compatibilité à la multiplication et passage à la puissance. Inégalité triangulaire.

Cercle trigonométrique $\mathbb{U}$

Notation $e^{i\theta}$, relations élémentaires de morphisme, inverse et opposé.
Formule d'Euler, formule de Moivre et utilisation pour la linéarisation.

Argument et forme trigonométrique

Notation $Arg(z)$ pour $z \in \mathbb{C}^*$ comme une mesure de l'angle modulo 2π .
Formule de l'argument d'un produit, d'un quotient et du conjugué.
Ecriture trigonométrique (ou polaire ou exponentielle).

Liste de Questions de cours :

1. Enoncer puis démontrer la formule de somme des carrés : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Enoncer puis démontrer la formule de factorisation : $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
3. Enoncer puis démontrer la formule du binôme de Newton : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
4. Enoncer puis démontrer l'inégalité triangulaire : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
5. Enoncer puis démontrer la compatibilité de la conjugaison aux passages à la puissance.
6. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

On demandera également sans démonstration de citer certaines formules de trigonométrie parmi : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(a) \cos(b)$, $\sin(a) \cos(b)$, $\sin(a) \sin(b)$, $\cos(p) + \cos(q)$, $\sin(p) + \sin(q)$

Exercices d'Application du Cours

1. Déterminer l'écriture exponentielle de $\frac{(\sqrt{3}-i)^{125}}{(2+2i)^{81}}$.
2. Résoudre l'équation $z^2 = -40 + 42i$.
3. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{3}\right)$

Devoir libre

1. Soit $\omega = e^{2i\pi/5}$. On appelle A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
  - (a) On pose $u = \omega + \omega^4$ et $v = \omega^2 + \omega^3$. Démontrer que u et v sont les solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$
  - (b) En déduire une valeur de $\cos(2\pi/5)$ à l'aide de radicaux.
  - (c) Déterminer l'affixe de H le point d'intersection de (A_1A_4) avec l'axe des abscisses.
  - (d) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω d'affixe $\frac{-1}{2}$ passant par le point B d'affixe i . Ce cercle coupe l'axe des abscisses en deux points M et N . On notera M le point d'affixe positive. Montrer que H est le milieu de $[OM]$. Déterminer l'affixe de N .
  - (e) Tracer la figure formée par les points de l'énoncé. Quel polygone régulier peut-on ainsi tracer à la règle et au compas ?