Polynôme de Bernstein

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $x \in \mathbb{R}$ un réel.
   (a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.
   (b) Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et en déduire que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.
   (c) En adaptant la méthode, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
   (d) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.
2. Pour $x \in [0,1]$ un réel, on note $S(x) = \sum_{k=0}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
   On considère $A = \left\{k \in [\![1,n]\!] \text{ tel que } \left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$.
   (a) Montrer que $\sum_{k\in A} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
   (b) Montrer que $\sum_{k\notin A} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.
   (c) En déduire que $S(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}$.

1. (a) On reconnaît la formule du Binôme de Newton
   $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1$.
   (b) Il s'agit de la formule du Capitaine. On a $k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$ car $[(n-1)-(k-1)]! = (n-k)!$.
   Puis $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$
   $= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$
   $= n\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} x^{l+1} (1-x)^{n-l-1}$ par changement d'indices
   $= nx\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} x^{l} (1-x)^{(n-1)-l}$
   $= nx.1 = nx$ d'après q1.a
   (c) On a $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$
   $= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$
   $= n(n-1)x^2\sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} x^{l} (1-x)^{(n-2)-l}$
   $= n(n-1)x^2$
   (d) On a $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$
   $= \sum_{k=0}^{n} \left(x^2 - 2\frac{k}{n}x + \frac{k^2}{n^2}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$
   $= x^2 S_0(x) - \frac{2x}{n} S_1(x) + \frac{1}{n^2} S_2(x)$ par linéarité.
   Avec les sommes S_0, S_1 et S_2 calculable :

$$S_0(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

$$\begin{aligned} S_2(x) &= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k^2-k)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + S_1(x) \\ &= n(n-1)x^2 + nx. \end{aligned}$$

   Donc $P(X) = x^2 - \frac{2x}{n}nx + \frac{1}{n^2}(n(n-1)x^2 + nx) = \frac{-n^2x^2 + n^2x^2 - nx^2 + nx}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n}$.
2. (a) On a $\sum_{k\in A} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

$\leq \sum_{k\in A} \frac{1}{\sqrt{n}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$
$\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$
$\leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ d'après q1a.

(b) Dans ce cas $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $y_k = \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq 1$. Ainsi $y_k \leq y_k^2 = n\left(x - \frac{k}{n}\right)^2$ analogue à la q1d.

Donc $\sqrt{n}\sum_{k\notin A} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$
$= \sum_{k\notin A} y_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$
$\leq n \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = n\frac{x(1-x)}{n}$.

On a donc bien $\sum_{k\notin A} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

(c) On a $S(x) = S_5(x) + S_6(x)$ avec $S_5(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $S_6(x) = \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$

En étudiant la fonction $x \mapsto x(1-x)$, on voit qu'elle est maximal en $x = 1/2$ et vaut $1/4$. Donc $x(1-x) \leq 1/4$.

Ainsi $S(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} = \frac{5}{4\sqrt{n}}$.