# DS n° 1 - Corrigé

**Exercice 1 :** a) On montre le résultat par $\boxed{\text{récurrence}}$ (simple) sur $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation</u> Pour $n = 0$, la somme est vide $\sum_{k=1}^{0} F_k^2 = 0$ et $F_0 F_1 = 0$.
<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
On calcul $\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + (F_{n+1})^2$
$= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} F_{n+2}$.
<u>Conclusion</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.

b) On montre le résultat ($u_n < u_{n+1}$) par $\boxed{\text{récurrence double}}$ sur $n \in \mathbb{N}$.
<u>Initialisation</u> Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 < 1 = u_1$.
Pour $n = 1$, on calcul $u_2 = \frac{0+1}{2} + 1 = \frac{3}{2} > 1 = u_1$.
<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < u_{n+1}$ et $u_{n+1} < u_{n+2}$.
On a $u_{n+3} = \frac{u_{n+1}+u_{n+2}}{2} + 1 > \frac{u_n+u_{n+1}}{2} + 1 = u_{n+2}$
<u>Conclusion</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$. Donc la suite est strictement croissante.

c) On montre le résultat par $\boxed{\text{récurrence forte}}$ sur $n \in \mathbb{N}^*$.
<u>Initialisation</u> Pour $n = 1$, on calcul $v_1 = v_0 = 1$ et $2^{1-1} = 1$.
<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!] v_k = 2^{k-1}$.
On a $v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$ par H.R.
$= 1 + \frac{2^n - 1}{2-1} = 2^n$.
<u>Conclusion</u> Pour tout $n > 0, v_n = 2^{n-1}$

**Exercice 2 :** a) On raisonne par $\boxed{\text{Analyse-Synthèse}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
Alors $x(x-3) = 3x - 5$ puis $x^2 - 6x + 5 = 0$ donc $x \in \{1, 5\}$.
Puis on vérifie chacun des candidats :
Pour $x = 1$ l'expression n'est pas définie.
Pour $x = 5$ on a $\sqrt{5 \times 2} = \sqrt{15 - 5}$ est vrai.
<u>Conclusion</u> Le nombre 5 est l'unique solution de l'équation.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On raisonne par $\boxed{\text{disjonction}}$.
Si $x \geq 1$ alors l'inéquation s'écrit $2x + 1 < x - 1 + 1 \Leftrightarrow x < -1$. Il n'y pas de solution.
Si $x \leq \frac{-1}{2}$ alors $-2x - 1 < -x + 1 + 1 \Leftrightarrow -3 < x$. Donc $x \in ]-3, \frac{-1}{2}]$.
Si $\frac{-1}{2} < x < 1$ alors $2x + 1 < -x + 1 + 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$. Donc $x \in ]\frac{-1}{2}, \frac{1}{3}[$.
<u>Conclusion</u> L'ensemble solution est l'union $]-3, \frac{1}{3}[$.

c) Soit $x \in [\frac{5}{2}, +\infty[$. On raisonne par $\boxed{\text{disjonction}}$ pour valider le $\boxed{\text{passage au carré}}$.
Si $x < 4$ alors $x - 4 < 0 \leq \sqrt{2x-5}$ est toujours vraie. Donc $x \in [\frac{5}{2}, 4[$.
Si $x \geq 4$ alors l'inéquation est équivalente à $(x-4)^2 < 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 < 0$.
Les racines du polynômes sont 3 et 7. Donc $x \in [4, 7[$ (entre les racines)
<u>Conclusion</u> L'ensemble solution est l'union $[\frac{5}{2}, 7[$.

d) On réalise la transformation $\boxed{a\cos x + b\sin x = A\cos(x - \varphi)}$.
On a $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$. Donc $A = 2$ et $\varphi \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
Ainsi l'équation est équivalente à : $2\cos(x - \pi/3) = \sqrt{2}$
$\Leftrightarrow \cos(x - \pi/3) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi/4)$
$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $x - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ .
<u>Conclusion</u> L'ensemble solution est $\left\{\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

e) On réalise la transformation $\boxed{a\cos x + b\sin x = A\cos(x - \varphi)}$.
On a $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Donc $A = \sqrt{2}$ et $\varphi \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Donc l'équation est équivalente à : $\sqrt{2}\cos(x+\pi/4) \geq 1$
$\Leftrightarrow \cos(x+\pi/4) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi/4) = \cos(-\pi/4)$
$\Leftrightarrow x+\pi/4 \in [-\pi/4, \pi/4] + 2\pi\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x \in [-\pi/2, 0] + 2\pi\mathbb{Z}$
Conclusion L'ensemble solution est $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] + 2\pi\mathbb{Z}$.

f) Soit $x \in \mathbb{R}$. On réalise le $\boxed{\text{changement de variable}}$ $y = \cos x \in [-1, 1]$.

On raisonne alors par $\boxed{\text{Analyse-Synthèse}}$ pour pouvoir passer au carré.

On suppose que $\sqrt{1+3y} = 1 + \sqrt{2-y}$.
Donc $1 + 3y = 1 + 2\sqrt{2-y} + 2 - y$ puis $\sqrt{2-y} = \frac{1}{2}(4y-2) = 2y-1$.
Donc $2 - y = (2y-1)^2 = 4y^2 - 4y + 1$ puis $4y^2 - 3y - 1 = 0$. Donc $y \in \{1, -1/4\}$.
Pour $y = 1$, on a $\sqrt{1+3y} = 2$ et $\sqrt{2-y} = 1$ convient.
Pour $y = \frac{-1}{4}$, on a $\sqrt{1+3y} = \frac{1}{2}$ et $\sqrt{2-y} = \frac{3}{2}$ n'est pas solution.
Il reste à résoudre l'équation $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \equiv 0[2\pi]$.
Conclusion L'ensemble solution est $\{0\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

**Exercice 3 :** a) On $\boxed{\text{linéarise}}$ l'expression et on utilise la formule $\boxed{\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

On a $\sum_{k=1}^n \frac{(2k+1)(2k-1)}{4} = \sum_{k=1}^n \frac{4k^2-1}{4}$
$= \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^n 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n}{4}$
$= \frac{n}{12}\left(2(n+1)(2n+1) - 3\right)$
$= \frac{n(4n^2+6n-1)}{12}$.

b) On reconnaît la formule du binôme de Newton $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$.

On a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k 2^{n+k} 3^n 7^{n-k}$
$= 2^n 3^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-2)^k 7^{n-k}$
$= 6^n(-2+7)^n = 30^n$.

c) On calcul une $\boxed{\text{somme triangulaire}}$ comme une somme simple dans une autre.

On a $\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} ij = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j ij$
$= \sum_{j=1}^n j\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (j^3 + j^2)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$
$= \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}$
$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$.

On a utilisé la formule $\boxed{\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$.

d) On calcul une $\boxed{\text{somme triangulaire}}$ et on utilise la formule $\boxed{\sum_{k=a}^b q^k = q^a \frac{q^{b-a+1}-1}{q-1}}$.

On a $\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} 2^i 3^j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j 2^i 3^j$
$= \sum_{j=1}^n 3^j 2 \frac{2^j-1}{2-1} = 2\sum_{j=1}^n 6^j - 2\sum_{j=1}^n 3^j$
$= 12\frac{6^n-1}{6-1} - 6\frac{3^n-1}{3-1}$
$= \frac{3}{5}(4.6^n - 5.3^n + 1)$.

e) On peut séparer le produit en trois puis faire un $\boxed{\text{retournement d'indice}}$ $l = n+1-k$.
On a $\prod_{k=1}^n 2k(n+1-k)$
$= \prod_{k=1}^n 2 \prod_{k=1}^n k \prod_{k=1}^n (n+1-k)$
$= 2^n n! \prod_{l=1}^n l = 2^n n! n! = 2^n (n!)^2$.

f) On peut faire apparaître un $\boxed{\text{produit télescopique}}$ $\prod_{k=a}^b \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{b+1}}{u_a}$.
On a $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1$.

**Exercice 4 :** a) On applique l'algorithme du $\boxed{\text{pivot de Gauss-Jordan}}$.

$$\begin{cases} x+y-3z &= 3 \\ 2x+3y-z &= 5 \\ 3x-y+z &= 3 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x+y-3z &= 3 \\ y+5z &= -1 \\ -4y+10z &= -6 \end{cases} \begin{smallmatrix} L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{smallmatrix} \text{ ssi } \begin{cases} x-8z &= 4 \\ y+5z &= -1 \\ 30z &= -10 \end{cases} \begin{smallmatrix} L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3+4L_2 \end{smallmatrix}$$

Donc l'unique solution est $(4/3, 2/3, -1/3)$

b) De même $\begin{cases} 2x-y+z &= 1 \\ x+3y-2z &= -2 \\ 3x+2y-z &= -1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} -7y+5z &= 5 \\ x+3y-2z &= -2 \\ -7y+5z &= 5 \end{cases}$ avec $\begin{smallmatrix} L_1 \leftarrow L_1-2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_2 \end{smallmatrix}$

ssi $\begin{cases} x &= -2-3y+2z = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}z \\ y &= \frac{-5}{7} + \frac{5}{7}z \\ z &\in \mathbb{R} \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $\begin{pmatrix} 1/7 \\ -5/7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/7 \\ 5/7 \\ 1 \end{pmatrix}\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\mathbb{R}$.

c) On remarque le $\boxed{\text{système somme-produit}}$ avec $a = x+y$ et $b = y+z$ vérifiant $\begin{cases} ab &= 6 \\ a+b &= 5 \end{cases}$.

Les solutions sont les racines de $X^2 - 5X + 6 = (X-3)(X-2)$.

Puis $\begin{cases} x+y &= a \\ y+z &= b \\ 2x-y+z &= 3 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x+y &= a \\ y+z &= b \\ -3y+z &= 3-2a \end{cases}$ avec $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

ssi $\begin{cases} x+y &= a \\ y+z &= b \\ 4z &= 3-2a+3b \end{cases}$ avec $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$

Donc la solution est $((3+2a-b)/4, (-3+2a+b)/4, (3-2a+3b)/4)$ en fonction de $(a,b) \in \{(2,3);(3,2)\}$.

Il y a donc deux solutions $\{(1,1,2);(7/4,5/4,3/4)\}$.

**Problème I :**

1. On a $\alpha\beta = \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \sqrt[3]{4-5} = \sqrt[3]{-1} = -1$ car $(-1)^3 = -1$.
   Et $\alpha^3 + \beta^3 = (2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5}) = 4$.
2. On calcul $s^3 = (\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ avec la formule du binôme de Newton
   Puis $s^3 = (\alpha^3+\beta^3) + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 4 - 3s$ d'après 1.
3. On remarque que 1 est une racine de $X^3 + 3X - 4 = (X-1)(X^2+aX+4)$.
   Le coefficient $a \in \mathbb{R}$ vérifie $4 - a = 3$ à l'aide du coefficient de $X$.
   Donc $a = 1$ et $X^3 + 3X - 4 = (X-1)(X^2+X+4)$ n'admet pas d'autres racines réelles car $\Delta = -15 < 0$.
   Ainsi $s \in \mathbb{R}$ est l'unique racine réelle et $s = 1$.
4. Les questions précédentes permettent d'établir $s = \alpha + \beta = 1$ et $p = \alpha\beta = -1$.
   Donc $\alpha$ et $\beta$ sont les racines du polynôme $X^2 - sX + p = X^2 - X - 1$.
   Les racines sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$.
   Or $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, donc $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.