Devoir Surveillé de Mathématiques n$^\text{o}$ 1
le samedi 20 Septembre 2025 - durée 3h

Les questions des exercices sont indépendantes.

Exercice 1 : Raisonnement par récurrence.

a) On considère la suite définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.

b) On considère la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+u_n}{2} + 1$.
Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

c) On considère la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n = 2^{n-1}$.

Exercice 2 : Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

b) $|2x+1| < |x-1| + 1$.

c) $x - 4 < \sqrt{2x-5}$.

d) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

e) $\cos x - \sin x \geq 1$.

f) $\sqrt{1+3\cos x} - \sqrt{2-\cos x} = 1$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et produit suivantes :

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)(2k-1)}{4}$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k 2^{n+k} 3^n 7^{n-k}$

c) $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$.

d) $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2^i 3^j$.

e) $\prod_{k=1}^{n} 2k(n+1-k)$.

f) $\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Exercice 4 : Résoudre les système suivants :

a) $\begin{cases} x+y-3z &= 3 \\ 2x+3y-z &= 5 \\ 3x-y+z &= 3 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x-y+z &= 1 \\ x+3y-2z &= -2 \\ 3x+2y-z &= -1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} (x+y)(y+z) &= 6 \\ x+2y+z &= 5 \\ 2x-y+z &= 3 \end{cases}$

Problème I : *On rappelle ici la définition de la racine cubique :*
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = x^3$. On le note $x = \sqrt[3]{y}$.
Par exemple $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ car $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$.
On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. On recherche une expression plus simple de ces deux nombres.

1. Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3 + \beta^3$.
2. On note $s = \alpha + \beta$. Montrer que $s^3 = 4 - 3s$.
3. Déterminer les racines de $X^3 + 3X - 4$ et en déduire la valeur de s.
4. En déduire que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.