Les nombres complexes

Révision de la semaine 2

Résolution d'équations

Détermination des racines carrés d'un nombre complexe sous forme trigo ou algébrique.

Application à la recherche des racines d'un trinôme à coefficients quelconques.

Racines n -ième de l'unité (noté $\mathbb{U}_n$) et résolution de l'équation $z^n = \rho e^{i\theta}$.

La fonction $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Résolution dans $\mathbb{C}$ de $e^z = a$ où $a \in \mathbb{C}^*$.

Représentation géométrique

Affixe d'un point ou d'un vecteur. Les angles sont des arguments de quotient.

CNS sur les affixes de deux vecteurs colinéaires, trois points alignées, deux vecteurs orthogonaux.

Correspondances sur les affixes des translations, homothéties, rotations et de la réflexion $z \mapsto \bar{z}$.

Liste de Questions de cours :

- Enoncer puis démontrer l'inégalité triangulaire : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- Enoncer puis démontrer la compatibilité de la conjugaison aux passages à la puissance.
- Calculer la valeur de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
- Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 3 - i\sqrt{3}$.
- Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Enoncer puis démontrer la paramétrisation de $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} \text{ pour } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.

Exercices d'Application du Cours

1. Résoudre l'équation $z^2 - 3(1+i)z + 4i = 0$ sur $\mathbb{C}$.
2. Résoudre l'équation $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ sur $\mathbb{C}$.
3. Résoudre l'équation $e^z + e^{-z} = \frac{3+i}{2}$ sur $\mathbb{C}$.

Devoir libre

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u = e^{i\varphi} \in \mathbb{U}$.

On note $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z^n = u\}$.

Dans chacune des questions, on recherche un ensemble géométrique décrit par une équation cartésienne à préciser.

- (a) Déterminer un cercle qui contient A .
- (b) On note $B = \{(1+i)z - 1 \text{ pour } z \in A\}$. Déterminer un cercle qui contient B .
- (c) On note $C = \{(1+z)^n \text{ pour } z \in A\}$. Déterminer une droite qui contient C .