Géométrie sur $\mathbb{C}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u = e^{i\varphi} \in \mathbb{U}$.
On note $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z^n = u\}$.
Dans chacune des questions, on recherche un ensemble géométrique décrit par une équation cartésienne à préciser.

1. Déterminer un cercle qui contient A.
2. On note $B = \{((1+i)z - 1) \text{ pour } z \in A\}$. Déterminer un cercle qui contient B.
3. On note $C = \{(1+z)^n \text{ pour } z \in A\}$. Déterminer une droite qui contient C.

1. On peut résoudre l'équation $z^n = u = e^{i\varphi}$ par $z = \exp\left(i\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1[\![$.

   Donc $A \subset \mathbb{U}$ est inclus dans le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

2. L'application $z \mapsto (1+i)z-1$ est la composée d'une rotation d'angle θ et d'une homothétie de rapport λ. Le centre est le point fixe $z = (1+i)z - 1$ ssi $iz = 1$ ssi $z = -i$. Le point de coordonnées $(0, -1)$. Le coefficient dominant est $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Donc $\lambda = \sqrt{2}$ et $\theta = \pi/4$.

   Ainsi le cercle unité qui contient A devient un autre cercle qui contient B. Le nouveau centre est l'image de 0 càd -1 de coordonnées $(-1, 0)$ et le nouveau rayon est augmenté de $\sqrt{2}$ par homothétie (la rotation ne change pas la taille du cercle). Ainsi B est contenu dans le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ d'équation $(x+1)^2 + y^2 = 2$.

3. On peut calculer $c_k = (1+z_k)^n = (1+e^{i\varphi_k})^n = 2^n \cos^n(\varphi_k/2) e^{in\varphi_k/2}$ avec $\varphi_k = \frac{2k\pi+\varphi}{n}$.

   On trouve ainsi $c_k = 2^n \cos^n(\varphi_k/2)(-1)^k e^{i\varphi/2}$. En particulier $\text{Arg}(c_k) = \varphi/2[\pi]$ est constant. Donc les points de C sont sur la droite qui passe par $(0,0)$ et $(\cos(\varphi/2), \sin(\varphi/2))$ d'équation $y\cos(\varphi/2) - x\sin(\varphi/2) = 0$.