Tracé du pentagone régulier

Soit $\omega = e^{2i\pi/5}$. On appelle A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On pose $u = \omega + \omega^4$ et $v = \omega^2 + \omega^3$. Démontrer que u et v sont les solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$
2. En déduire une valeur de $\cos(2\pi/5)$ à l'aide de radicaux.
3. Déterminer l'affixe de H le point d'intersection de (A_1A_4) avec l'axe des abscisses.
4. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω d'affixe $\frac{-1}{2}$ passant par le point B d'affixe i. Ce cercle coupe l'axe des abscisses en deux points M et N. On notera M le point d'affixe positive. Montrer que H est le milieu de $[OM]$. Déterminer l'affixe de N.
5. Tracer la figure formée par les points de l'énoncé. Quel polygone régulier peut-on ainsi tracer à la règle et au compas ?

1. On utilise la formule $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \sum_{k=0}^{4} \omega^k = (\omega^5 - 1)/(\omega - 1) = 0$.
   On remarque alors que $u + v = -1$.
   Puis $uv = (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1$.
   Alors u et v sont les racines de $(x - u)(x - v) = x^2 - (u + v)x + uv = x^2 + x - 1$.
2. On a : $u = \omega + \omega^4 = \omega + \bar{\omega} = 2\mathrm{Re}(\omega) = 2\cos(2\pi/5)$. La résolution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ donne $v < 0 < u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Donc $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3. On remarque que A_1 et A_4 sont symétrique par rapport à l'axe des abscisses car leurs affixes sont conjugués. Le point H est donc le milieu du segment. Il est d'affixe $\frac{\omega+\omega^4}{2} = \cos(2\pi/5)$.
4. Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est $|i - (-1/2)| = \sqrt{5}/2$. Donc le point M est d'affixe $-(1/2) + \sqrt{5}/2$. Donc le milieu $[OM]$ est bien d'affixe moitié : $(\sqrt{5} - 1)/4$. C'est le point H.
5. Ceci donne une méthode pour tracer un pentagone à la règle et au compas.