# DM1 - Corrigé

**Exercice 1 :** a) On a $\Delta = (i-3)^2 - 4.2.(3i-1) = 8-6i+8-24i = 16-30i$.

On recherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Ils vérifient $\begin{cases} a^2-b^2 & = 16 \\ 2ab & = -30 \\ a^2+b^2 & = 34 \end{cases}$. $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 & = 25 \\ b^2 & = 9 \\ ab & = -15 \end{cases}$. Puis $\delta = 5-3i$ ou $\delta = -5+3i$.

Les solutions sont donc $\frac{(3-i)+(5-3i)}{4} = 2-i$ et $\frac{(3-i)-(5-3i)}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.

b) Le discriminant de $z^2+3z+3-i$ est $\Delta = 9-4(3-i) = -3+4i$.

On recherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Ils vérifient $\begin{cases} a^2-b^2 & = -3 \\ 2ab & = 4 \\ a^2+b^2 & = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 & = 1 \\ b^2 & = 4 \\ ab & = 2 \end{cases}$. Donc $\delta = 1+2i$ ou $\delta = -1-2i$.

Les solutions sont donc $\frac{-3+1+2i}{2} = -1+i$ et $\frac{-3-1-2i}{2} = -2-i$.

c) On reconnait la formule du binôme de Newton :

$z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z - 1 = -4-4i$

$\Leftrightarrow (z-1)^5 = \sqrt{2}^5 e^{-3i\pi/4}$

$\Leftrightarrow z-1 = \sqrt{2}\omega e^{-3i\pi/20}$ pour $\omega \in \mathbb{U}_5$

$\Leftrightarrow z = 1+\sqrt{2}e^{2i\pi(k/5-3/40)}$ pour $k \in [\![0,4]\!]$.

Donc l'ensemble des solutions est :

$\left\{1+\sqrt{2}e^{-3i\pi/20}, 1+\sqrt{2}e^{5i\pi/20}, 1+\sqrt{2}e^{13i\pi/20}, 1+\sqrt{2}e^{21i\pi/20}, 1+\sqrt{2}e^{29i\pi/20}\right\}$.

d) Soit $z \in \mathbb{C} - \{i,-i\}$. On a : $(1+iz)^4(1-i) = (1-iz)^4(1+i)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \frac{1+i}{1-i} = e^{i\pi/2}$

$\Leftrightarrow \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\pi/8}\omega$ pour $\omega \in \mathbb{U}_4$

$\Leftrightarrow 1+iz = e^{i\pi/8+ik\pi/2}\omega(1-iz)$ pour $k \in [\![0,3]\!]$

$\Leftrightarrow z = i\frac{1-e^{i\pi/8+ik\pi/2}}{1+e^{i\pi/8+ik\pi/2}}$ pour $k \in [\![0,3]\!]$

$\Leftrightarrow z = \tan(\pi/16+k\pi/4)$ pour $k \in [\![0,3]\!]$ à l'aide de l'arc moitié.

Donc les solutions sont $\{\tan(\pi/16), \tan(5\pi/16), \tan(9\pi/16), \tan(13\pi/16)\}$.

**Exercice 2 :** a) On a $A_n + B_n = \left(\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) + \sin^2(kx)\right) - \sin^2(0)$

$= \sum_{k=0}^n 1 - 0 = n+1$ car $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

b) On a $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

Ainsi $A_n - B_n = \left(\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) - \sin^2(kx)\right) + \sin^2(0) = \sum_{k=0}^n \cos(2kx)$

c) On a $2\sin x\cos(2kx) = \sin(x+2kx) + \sin(x-2kx) = \sin[(2k+1)x] - \sin[(2k-1)x]$.

Donc $2\sin x \sum_{k=0}^n \cos(2kx) = \sum_{k=0}^n 2\sin x\cos(2kx)$

$= \sum_{k=0}^n (\sin[(2k+1)x] - \sin[(2k-1)x])$

$= \sin[(2n+1)x] - \sin[-x]$ par télescopage.

$= \sin[(2n+1)x] + \sin x$.

d) On suppose que $x \neq 0[\pi]$ ainsi $\sin x \neq 0$ et $A_n - B_n = \frac{\sin[(2n+1)x]}{2\sin x} + \frac{1}{2}$

Et on a $A_n = \frac{1}{2}\left((A_n+B_n) + (A_n-B_n)\right)$

$= \frac{1}{2}\left((n+1) + \frac{\sin[(2n+1)x]}{2\sin x} + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{2n+3}{4} + \frac{\sin[(2n+1)x]}{4\sin x}$.

De même $B_n = \frac{1}{2}\left((A_n+B_n) - (A_n-B_n)\right)$

$= \frac{1}{2}\left((n+1) - \frac{\sin[(2n+1)x]}{2\sin x} - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{2n+1}{4} - \frac{\sin[(2n+1)x]}{4\sin x}$.

e) On traite deux cas $x \equiv 0[2\pi]$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}, \cos(kx) = 1$ et $\sin(kx) = 0$. Donc $A_n = n+1$ et $B_n = 0$.

Lorsque $x \equiv \pi[2\pi]$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}, \cos(kx) = (-1)^k$ et $\sin(kx) = 0$. Donc $A_n = \sum_{k=0}^{n}[(-1)^k]^2 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ et $B_n = 0$.
Ainsi dans tous les cas $A_n = n+1$ et $B_n = 0$.