Semaine 4 - Du 6 au 10 Octobre 2025

Les nombres complexes

Révision de la semaine 3

Fonctions d'une variable réelle

Formalisme sur les applications

Composition, restriction et prolongement.
Image directe et réciproque d'un ensemble, notée $f^*(B) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}$.
L'image réciproque conserve les unions et les intersections.

Injection, Surjection et Bijection

La composée de deux injections (resp. surjections, bijections) l'est aussi.
La formule $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ pour f et g bijective.
Théorème de la bijection continue. (Admis à ce stade)

Propriétés des fonctions dérivables

Définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement.
Si f est dérivable alors f est continue.
Lien avec la monotonie stricte et large.

Opérations

Dérivée d'une somme, d'une combinaison linéaire et d'un produit.
Dérivée d'une composée, d'un quotient et d'une application réciproque.

Liste de Questions de cours :

a) Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 3 - i\sqrt{3}$.

b) Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Enoncer puis démontrer la paramétrisation de $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} \text{ pour } k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

d) Démontrer que la composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).

e) Montrer que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ en admettant $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

f) Enoncer puis démontrer la formule de la dérivée d'un produit.

Exercices d'Application du Cours

1. Etudier les variations de la fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x^x$.
2. Montrer que $g : \mathbb{R}_+^* \to]1, +\infty[, x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$ est une bijection.
   Préciser la bijection réciproque.
3. On considère $h : [1, +\infty[\to [0, +\infty[, x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
   Etudier ses variations et montrer qu'elle réalise une bijection.

Devoir libre

1. On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^3$.
   (a) Montrer que f est surjective mais pas injective.
   (b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.
   (c) Montrer que $f^*(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup j\mathbb{R} \cup j^2\mathbb{R}$.
   (d) On note $A = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } \mathrm{Arg}(z) \in [0, \frac{2\pi}{3}[+ 2\pi\mathbb{Z} \right\}$.
   Montrer que la restriction $g = f|_A^{\mathbb{C}^*} : A \to \mathbb{C}^*$ est une bijection.