

## Fonctions d'une variable réelles

Révision de la semaine 4

**Fonctions de classe  $C^n$  pour  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$**

Stabilité des classes par les opérations.

Formule de Leibniz.

Caractère  $C^n$  de la bijection réciproque sous condition sur la dérivée première.

**Fonctions usuelles de classe  $C^\infty$**

Les polynômes et les fractions rationnelles.

Les fonctions  $\exp$ ,  $\ln$ ,  $\log_b$ ,  $x \mapsto b^x$  et  $x \mapsto x^\alpha$ .

Les fonctions  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sh}$  et  $\operatorname{th}$ .

Les fonctions  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\tan$  et leurs réciproques.

---

## Liste de Questions de cours :

- a) Démontrer que la composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).
- b) Montrer que la fonction sinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en admettant  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .
- c) Énoncer puis démontrer la formule de la dérivée d'un produit.
- d) En tant que bijection réciproque, démontrer que la fonction  $\operatorname{Arcsin}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$  et calculer sa dérivée première.
- e) Énoncer puis démontrer la Formule de Leibniz.
- f) Énoncer puis démontrer le caractère  $C^n$  d'une bijection réciproque.

### Exercices d'Application du Cours

1. Déterminer les domaines de dérivation et les dérivées premières des fonctions :
  - (a)  $f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sqrt{x+1} - 1)$
  - (b)  $g(x) = \ln(\operatorname{ch}(2x)) + \ln(\operatorname{sh}(2x))$
  - (c)  $h(x) = x^{\ln x}$ .
2. Déterminer les domaines de dérivation et les dérivées  $n$ -ième des fonctions :
  - (a)  $f(x) = (x-1)^2(x^2 + 3x - 1)$
  - (b)  $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$
  - (c)  $h(x) = x^2 \cos(3x)$ .
3. On recherche à calculer  $\operatorname{th}^{-1}(y)$ .
  - (a) Montrer que  $\operatorname{th}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $] -1, 1[$ .
  - (b) Montrer que sa bijection réciproque est dérivable sur  $] -1, 1[$  et que  $(\operatorname{th}^{-1})'(y) = \frac{1}{1-y^2}$ .
  - (c) En déduire que  $\operatorname{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+y}{1-y} \right)$ .

### Devoir libre

1. On considère  $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
  - (b) Sur quel domaine la fonction  $f$  est-elle dérivable ? Calculer  $f'$ .
  - (c) En déduire que  $f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x)$  pour  $x \in ] -1, 1[$ .
  - (d) Déterminer une expression de  $f$  sur  $]1, +\infty[$  et sur  $] -\infty, -1[$ .
  - (e) Montrer que  $f$  n'est pas dérivable en 1 et  $-1$ .
  - (f) Tracer la courbe représentative de  $f$  (échelle : unité =  $3\text{cm}$ ).  
On précisera les tangentes obtenues en 0,  $\pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$  et  $\pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0.57$ .