

## La fonction cube sur $\mathbb{C}$

On considère l'application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^3$ .

1. Montrer que  $f$  est surjective mais pas injective.
2. Montrer que  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  et  $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ .
3. Montrer que  $f^*(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup j\mathbb{R} \cup j^2\mathbb{R}$ .
4. On note  $A = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } \text{Arg}(z) \in [0, \frac{2\pi}{3}[ + 2\pi\mathbb{Z}\}$ .  
Montrer que la restriction  $g = f|_A^{\mathbb{C}^*} : A \rightarrow \mathbb{C}^*$  est une bijection.

1. On a  $f(0) = 0$  et pour  $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ . On peut proposer  $f(\sqrt[3]{\rho} e^{i\theta/3}) = z$ . Donc tous les complexes sont dans l'image et  $f$  est surjective.

Par ailleurs,  $f(1) = f(j)$  avec  $1 \neq j$  donc  $f$  n'est pas injective.

2. On peut montrer  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  grâce à un argument d'analyse.

La restriction à  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto x^3$  est strictement croissante et continue. Donc l'image de l'intervalle  $] -\infty, +\infty[$  est déterminée par les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ . Ainsi  $f(]-\infty, +\infty[) = ]-\infty, +\infty[$ .

On montre  $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$  par double inclusion.

D'une part  $f(e^{i\theta}) = e^{3i\theta} \in \mathbb{U}$ . Donc  $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ .

D'autre part  $e^{i\varphi} = f(e^{i\varphi/3}) \in f(\mathbb{U})$ . Donc  $\mathbb{U} \subset f(\mathbb{U})$ .

3. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On résout  $z \in f^*(\mathbb{R})$  ssi  $f(z) \in \mathbb{R}$  ssi  $z^3 \in \mathbb{R}$

ssi  $(z^3 = 0 \text{ ou } \text{Arg}(z^3) \equiv 0[\pi])$

ssi  $z = 0 \text{ ou } \text{Arg}(z) \equiv 0[\pi/3]$

ssi  $z \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+^* \cup j\mathbb{R}_+^* \cup j^2\mathbb{R}_+^* \cup (-1)\mathbb{R}_+^* \cup (-j)\mathbb{R}_+^* \cup (-j^2)\mathbb{R}_+^*$

ssi  $z \in (\{0\} \cup \mathbb{R}_+^* \cup (-1)\mathbb{R}_+^*) \cup (\{0\} \cup j\mathbb{R}_+^* \cup (-j)\mathbb{R}_+^*) \cup (\{0\} \cup j^2\mathbb{R}_+^* \cup (-j^2)\mathbb{R}_+^*)$

ssi  $z \in \mathbb{R} \cup j\mathbb{R} \cup j^2\mathbb{R}$ .

4. On peut introduire la réciproque  $g : \begin{cases} \mathbb{C}^* \rightarrow A, \\ \rho e^{i\theta} \mapsto \sqrt[3]{\rho} e^{i\theta/3} \end{cases}$  avec  $\rho > 0$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

L'application  $g$  est bien définie et on vérifie que  $g \circ f = id_A$  et  $f \circ g = id_{\mathbb{C}^*}$ .