Lien entre les fonctions circulaires réciproques

On considère $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Sur quel domaine la fonction f est-elle dérivable ? Calculer f'.
3. En déduire que $f(x) = 2\text{Arctan}(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
4. Déterminer une expression de f sur $]1, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1[$.
5. Montrer que f n'est pas dérivable en 1 et -1.
6. Tracer la courbe représentative de f (échelle : unité$= 3cm$).
   On précisera les tangentes obtenues en 0, $\pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$ et $\pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0.57$.

1. La fraction rationnelle $F : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas.

   Puis $1 + x^2 - 2|x| = (1 - [x|)^2 \geq 0$ donc $1 + x^2 \geq |2x|$ et ainsi $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$.

   Or Arcsin est continue sur $[-1, 1]$ donc la composée est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$. Donc on exclut d'une part $F(x) = 1$ ssi $x = 1$ et d'autre part $F(x) = -1$ ssi $x = -1$.

   Donc f est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

   On a $F'(x) = \frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

   Puis $f'(x) = F'(x)\frac{1}{\sqrt{1-F(x)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\frac{(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} = 2\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}$.

   Donc $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{si } 1 - x^2 > 0 \\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{si } 1 - x^2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{sinon} \end{cases}$.
3. On dispose de limite à droite et à gauche : $\lim_{1^+} f' = \lim_{(-1)^-} f' = -1$ et $\lim_{1^-} f' = \lim_{(-1)^+} f' = 1$. Donc f est dérivable à droite et à gauche en -1 et en 1 mais n'est pas dérivable car admet des nombres dérivés différents.
4. On dispose des équations de tangentes :
   En $0, y = f(0) + f'(0)x = 2x$.
   En $\sqrt{3}, y = \pi/3 - \frac{1}{2}(x - \sqrt{3})$.
   En $1/\sqrt{3}, y = \pi/3 + \frac{3}{2}(x - 1/\sqrt{3})$.
   En $-\sqrt{3}, y = -\pi/3 - \frac{1}{2}(x + \sqrt{3})$.
   En $-1/\sqrt{3}, y = -\pi/3 + \frac{3}{2}(x + 1/\sqrt{3})$.