

DS 2 - Corrigé

Exercice 1 : a. Le discriminant de l'équation $\Delta = 16^2 - 16(11 - 12i) = 16(5 + 12i)$.

On recherche une racine de $5 + 12i$ sous forme algébrique $\delta = a + ib$. Il vérifie le

$$\text{système } \begin{cases} a^2 - b^2 &= 5 \\ 2ab &= 12. \text{ Donc } \delta = 3 + 2i \text{ convient.} \\ a^2 + b^2 &= 13 \end{cases}$$

Puis les solutions sont $\frac{16+4(3+2i)}{8} = \frac{7}{2} + i$ et $\frac{16-4(3+2i)}{8} = \frac{1}{2} - i$.

b. On écrit la constante sous la forme exponentielle puis on résout $z^n = \rho e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \left(\frac{i\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+i} \right)^{2025} &= \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/6}} \right)^{2025} \\ &= (e^{i\pi/6})^{2025} = e^{9i\pi/6} = e^{3i\pi/2} \text{ car } 2025 = 12 \times 168 + 9. \end{aligned}$$

On résout ainsi $z^5 = e^{3i\pi/2}$ ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_5, z = \omega e^{3i\pi/10}$.

Donc $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \{ \exp((4k+3)\frac{i\pi}{10}) \text{ pour } k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket \}$.

c. L'équation s'écrit également $\left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^3 = \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$ pour $z \neq -i$ qui n'est pas solution.

On écrit $\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} = \frac{\rho e^{i\alpha}}{\rho e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$ avec $\rho = |1 + i \tan \alpha| = |1 - i \tan \alpha|$.

Ainsi $\left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^3 = e^{2i\alpha}$ ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_3, \frac{1+iz}{1-iz} = \omega e^{2i\alpha/3}$

ssi $\exists k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \frac{1+iz}{1-iz} = e^{2ik\pi/3} e^{2i\alpha/3} = e^{i\theta_k}$ avec $\theta_k = \frac{2(k\pi+\alpha)}{3}$

ssi $\exists k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, z = \frac{e^{i\theta_k}-1}{i(e^{i\theta_k}+1)} = \tan(\theta_k/2)$ avec l'arc moitié.

Donc $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \{ \tan(\alpha/3), \tan(\alpha/3 + \pi/3), \tan(\alpha/3 + 2\pi/3) \}$.

d. On peut reconnaître la formule du binôme de Newton $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

avec $a = z^2$ et $b = 2$. L'équation s'écrit $(z^2 + 2)^3 + 1 = 0$ ssi $(z^2 + 2)^3 = -1 = (-1)^3$ ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_3, z^2 + 2 = -\omega$ ssi $\exists \omega \in \{1, j, j^2\}, z^2 = -2 - \omega$.

On distingue les cas $\omega = 1, z^2 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$. Donc $z \in \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$

Si $\omega = j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, z^2 = \frac{-3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}e^{7i\pi/6}$. Donc $z \in \{3^{1/4}e^{7i\pi/12}, 3^{1/4}e^{-5i\pi/12}\}$.

Si $\omega = j^2 = \bar{j}$, on trouve l'équation conjugué donc $z \in \{3^{1/4}e^{-7i\pi/12}, 3^{1/4}e^{5i\pi/12}\}$ sont les solutions conjuguées.

Donc $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, 3^{1/4}e^{7i\pi/12}, 3^{1/4}e^{-7i\pi/12}, 3^{1/4}e^{5i\pi/12}, 3^{1/4}e^{-5i\pi/12}\}$.

Exercice 2 : On recherche à appliquer le Théorème de la bijection continue.

Lorsque la fonction f est bijective, on résout $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1[, x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$

On peut observer que f est une fonction paire $f(-x) = f(x)$ en particulier $f(-1) = f(1)$ donc f n'est pas injective.

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{+\infty} f[= [-1, 1[$. Par symétrie, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et $f(\mathbb{R}_-) = f(\mathbb{R}_+) = [-1, 1[$. Ainsi f est surjective.

b. $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$.

Pour $x \geq 0$, on a $x^2 + x + 1 \geq 1 > 0$. Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} > 0$. Puis $g(0) = \ln(1) = 0$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$. Donc g réalise une bijection continue de $\mathbb{R}_+$ vers $g(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

On résout $g(x) = y$ ssi $x^2 + x + 1 = e^y$ ssi $x^2 + x + (1 - e^y) = 0$.

On a $\Delta = 1 - 4(1 - e^y) = 4e^y - 3 \geq 4e^0 - 3 = 1 > 0$.

Donc $x \in \left\{ \frac{-1+\sqrt{4e^y-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{4e^y-3}}{2} \right\}$. Or $\frac{-1-\sqrt{4e^y-3}}{2} < 0$.

Ainsi $x = \frac{-1+\sqrt{4e^y-3}}{2} > 0$ est l'unique solution.

En conclusion $g^{-1}(y) = \frac{-1 + \sqrt{4e^y - 3}}{2}$.

c. $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{\text{ch}(x) - 1}$.

Pour $x \geq 0$, on a $\text{ch}(x) - 1 > 0$ ssi $\text{ch}(x) \neq 1$ ssi $x \neq 0$. Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(x) = \frac{\text{sh}(x)}{2\sqrt{\text{ch}(x) - 1}} > 0$.

Ainsi h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a $h(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} h = +\infty$. Donc h réalise une bijection continue de $\mathbb{R}_+$ vers $h(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

On résout $h(x) = y$ ssi $\text{ch}(x) - 1 = y^2$

ssi $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y^2 + 1$

ssi $(e^x)^2 - 2(y^2 + 1)e^x + 1 = 0$

Le discriminant est $\Delta = 4(y^2 + 1)^2 - 4 = 4(y^2)(y^2 + 2) \geq 0$.

Donc $e^x \in \{(y^2 + 1) + y\sqrt{y^2 + 2}, (y^2 + 1) - y\sqrt{y^2 + 2}\}$. Or $x \geq 0$ donc $e^x \geq 1$.

Ainsi $e^x = (y^2 + 1) + y\sqrt{y^2 + 2}$ car $0 < (y^2 + 1) - y\sqrt{y^2 + 2} < 1$ pour $y > 0$.

En conclusion $h^{-1}(y) = \ln(y^2 + 1 + y\sqrt{y^2 + 2})$.

Exercice 3 : a. On rappelle $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z^n = 1\} = \{\exp(\frac{2ik\pi}{n}) \text{ pour } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.

Ainsi $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(2ik\pi/n)$ d'après la paramétrisation

$= \sum_{k=0}^{n-1} \exp(2i\pi/n)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ d'après la formule de Moivre

$= \omega^0 \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0$ car $\omega^n = 1$

b. On a $\prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$

$= \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega^{n(n-1)/2}$

$= \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \frac{n(n-1)}{2}\right)$ d'après la formule de Moivre.

$= \exp(i\pi(n-1)) = (-1)^{n-1}$.

c. On reconnaît la formule du binôme de Newton : $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k = (\omega + 1)^n - \omega^n$

$= (e^{2i\pi/n} + e^{i0})^n - 1 = (2 \cos(\pi/n) e^{i\pi/n})^n - 1$ avec l'arc moitié

$= 2^n \cos^n(\pi/n) e^{i\pi} - 1 = -2^n \cos^n(\pi/n) - 1 \in \mathbb{R}$.

d. On peut faire apparaître une somme triangulaire en écrivant $(k+1) = \sum_{l=0}^k 1$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \omega^k = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k \omega^k$

$= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=l}^{n-1} \omega^k$

$= \sum_{l=0}^{n-1} \omega^l \frac{1 - \omega^{n-l}}{1 - \omega} = \frac{1}{1 - \omega} \sum_{l=0}^{n-1} (\omega^l - \omega^n)$

$\frac{1}{1 - \omega} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \omega^l - \sum_{l=0}^{n-1} 1 \right) = \frac{1}{1 - \omega} (0 - n)$

$= \frac{-n}{\omega - 1} = \frac{n}{2 \cos(\pi/n) e^{i\pi/n}}$.

Donc le module est $\frac{n}{2 \cos(\pi/n)} > 0$ et l'argument est $-\frac{\pi}{n}$ modulo 2π .

Problème I : Partie A :

1. On a $\sqrt{17} - 1 < \sqrt{25} - 1 = 4 < 8$ et $34 - 2\sqrt{17} < 34 + 2\sqrt{17}$ donc par croissance de la fonction racine. $\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} < \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$. Ceci permet d'avoir A est strictement positif car : $(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} < 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$.

2. On calcule :

$$\begin{aligned} A^2 &= (1 - \sqrt{17})^2(34 - 2\sqrt{17}) + 16(1 - \sqrt{17})\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})(34 + 2\sqrt{17})} + 64(34 + 2\sqrt{17}) \\ &= (18 - 2\sqrt{17})(34 - 2\sqrt{17}) + 16(1 - \sqrt{17})\sqrt{34^2 - 4 \cdot 17} + 2^7(17 + \sqrt{17}) \\ &= 2^2(170 - 26\sqrt{17}) + 2^7(\sqrt{17} - 17) + 2^7(17 + \sqrt{17}) \\ &= 680 + 152\sqrt{17} = 4(170 + 38\sqrt{17}). \end{aligned}$$

Donc $A = 2\sqrt{170 + 38\sqrt{17}}$.

3. $\Rightarrow$ On suppose que $a + b = S$ et $ab = P$ alors a et b sont racines du polynôme : $(X - a)(X - b) = X^2 - (a + b)X + ab = X^2 - SX + P$.
- $\Leftarrow$ Réciproquement, on suppose que a et b sont racines de $X^2 - SX + P$ alors l'une vaut : $\frac{S+\sqrt{\Delta}}{2}$ et l'autre $\frac{S-\sqrt{\Delta}}{2}$ avec $\Delta = S^2 - 4P \geq 0$ car il existe des racines réelles. On a alors $a + b = \frac{S+\sqrt{\Delta}}{2} + \frac{S-\sqrt{\Delta}}{2} = S$ et $ab = \frac{S+\sqrt{\Delta}}{2} \frac{S-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{S^2-\Delta}{4} = P$.
4. On recherche les solutions de l'équation $X^2 - \frac{1-\sqrt{17}}{4}X - \frac{1}{4}$.
Le discriminant est $\Delta = \frac{1}{16}(34 - 2\sqrt{17}) > 0$.
Donc les solutions sont : $\frac{1}{8}(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}})$ et $\frac{1}{8}(1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}})$.
5. On a $\sin(h/2) = 0 \Leftrightarrow \frac{h}{2} \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow h \equiv 0[2\pi]$.
Dans ce cas, $C_n(a, h) = (n+1)\cos(a)$ et $S_n(a, h) = (n+1)\sin(a)$.
6. On rappelle $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ lorsque $q \neq 1$.

$$\begin{aligned} C_n(a, h) + iS_n(a, h) &= \sum_{k=0}^n e^{i(a+kh)} = e^{ia} \sum_{k=0}^n (e^{ih})^k = e^{ia} \frac{1 - e^{ih(n+1)}}{1 - e^{ih}} \\ &= e^{ia} \frac{e^{-ih/2} - e^{ih(n+1/2)}}{e^{-ih/2} - e^{ih/2}} = e^{ia} \frac{e^{ih(n+1/2)} - e^{-ih/2}}{2i \sin(h/2)}. \end{aligned}$$

Puis la partie réelle est $C_n(a, h) = \frac{\sin(a+h(n+1/2)) - \sin(a-h/2)}{2 \sin(h/2)}$.
La partie imaginaire est $S_n(a, h) = \frac{\cos(a-h/2) - \cos(a+h(n+1/2))}{2 \sin(h/2)}$.

Partie B :

- On a $\cos[(17-k)\theta] = \cos[\pi - k\theta] = -\cos(k\theta)$
et $\sin[(17-k)\theta] = \sin[\pi - k\theta] = \sin(k\theta)$.
- On a $\cos 3\theta > \cos 6\theta = -\cos 11\theta$ donc $\cos 3\theta + \cos 11\theta > 0$.
Puis $\cos 5\theta$ et $\cos 7\theta$ sont positifs donc : $x_1 > 0$.
- On a $x_1 + x_2 = \sum_{k=0}^7 \cos(\theta + 2k\theta) = C_7(\theta, 2\theta) = \frac{\sin(\theta+2\theta(7+1/2)) - \sin(0)}{2 \sin(2\theta/2)} = \frac{1}{2}$.
- On a $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.
On obtient en développant : $2x_1x_2 = 4 \cos(2\theta) + 4 \cos(4\theta) + 4 \cos(6\theta) + 4 \cos(8\theta) + 4 \cos(10\theta) + 4 \cos(12\theta) + 4 \cos(14\theta) + 4 \cos(16\theta)$.
- Par symétrie du B.1), on obtient $x_1x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$.
- Alors x_1 et x_2 sont racines de $X^2 - X/2 - 1$ comme système somme-produit et $x_1 > 0$.
Donc $x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$.
- On a $2y_1y_2 = \cos 10\theta + \cos 4\theta + \cos 14\theta + \cos 8\theta + \cos 12\theta + \cos 2\theta + \cos 16\theta + \cos 6\theta = -(x_1 + x_2) = -1/2$. On obtient de même $y_3y_4 = -1/4$.
- On sait que y_1 et y_2 ont pour somme $x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ et pour produit $\frac{-1}{4}$. Donc ils sont solutions du polynôme $X^2 - \frac{1+\sqrt{17}}{2}X - \frac{1}{4}$. De plus $y_1 > y_2$ d'où :
 $y_1 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}})$ et $y_2 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}})$.
Puis de même : $y_3 = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}})$ et $y_4 = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}})$.
- On peut écrire $y_1 = 2 \cos(4\theta) \cos(\theta) = -2 \cos(13\theta) \cos(\theta)$. Ceci permet de trouver la valeur du produit de $\cos(\theta)$ et $\cos(13\theta)$. La somme est donnée par y_3 . La résolution du polynôme $X^2 - \frac{1}{8}(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}})X - \frac{1}{16}(1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}})$ et la remarque $\cos(\theta) > \cos(13\theta)$ donne : $\Delta = \frac{1}{16} \left(17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 + 38\sqrt{17}} \right)$ car on retrouve la valeur de A . Puis :

$$\cos(\pi/17) = \frac{1}{16} \left(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}} \right).$$