

Devoir Surveillé de Mathématiques n° 2

le samedi 11 Octobre 2025 - durée 3h

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{C}$:

- $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$.
- $z^5 = \left(\frac{i\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+i}\right)^{2025}$.
- $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.
- $z^6 + 6z^4 + 12z^2 + 9 = 0$.

Exercice 2 : Etudier les variations des applications suivantes. Sont-elles injectives ou surjectives ?

Lorsque l'application est bijective, on précisera la bijection réciproque.

- $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1[, x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$
- $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$.
- $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{\operatorname{ch}(x) - 1}$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$.

- Rappeler la définition de $\mathbb{U}_n$. En déduire que $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.
- Montrer que $\prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = (-1)^{n-1}$.
- Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k$. Montrer que c'est un réel.
- Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \omega^k$. Préciser son module et son argument.

Problème I : L'objet du problème est d'exprimer $\cos \frac{\pi}{17}$ à l'aide de radicaux.

Partie A : On pose $A = (1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$.

- Déterminer le signe de A .
- Calculer A^2 sous la forme $p + q\sqrt{17}$ avec p et q des entiers.
En déduire une expression plus simple de A .
- Soient $a, b, S, P \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence :
 $(a + b = S \text{ et } ab = P) \Leftrightarrow (a \text{ et } b \text{ sont les solutions de } X^2 - SX + P = 0)$.
- Trouver les réels qui ont pour somme $\frac{1-\sqrt{17}}{4}$ et pour produit $-\frac{1}{4}$.
- Soient $a, h \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit :

$$C_n(a, h) = \sum_{k=0}^n \cos(a + kh) \text{ et } S_n(a, h) = \sum_{k=0}^n \sin(a + kh).$$

Que valent ces sommes si on suppose $\sin \frac{h}{2} = 0$?

- On suppose désormais $\sin \frac{h}{2} \neq 0$. Rappeler la formule $\sum_{k=0}^n q^k = \dots$ pour $q \in \mathbb{C} - \{1\}$ et déterminer des expressions simples de $C_n(a, h)$ et $S_n(a, h)$.

Partie B : Dans la suite, on pose $\theta = \frac{\pi}{17}$ et :

$$x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta) \text{ et } x_2 = \cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$$

- Montrer que pour $k \in \llbracket 0, 17 \rrbracket$, $\cos[k\theta] = -\cos[(17-k)\theta]$ et $\sin[k\theta] = \sin[(17-k)\theta]$.
- A l'aide des variations de la fonction $\cos$, montrer que $x_1 > 0$.
- Montrer que $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ à l'aide de la question A.6 .
- Rappeler la formule $\cos(a) \cos(b) = \dots$ et simplifier le produit $x_1 x_2$.
- En déduire que $x_1 x_2 = -1$.
- Déterminer des expressions de x_1 et x_2 à l'aide de radicaux.
- On pose désormais :

$$y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta), y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta), \\ y_3 = \cos(\theta) + \cos(13\theta) \text{ et } y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta).$$

Calculer les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$.

- En déduire les expressions à l'aide de radicaux des quatre nombres y_1, y_2, y_3 et y_4 .
- Exprimer y_1 en tant qu'un produit de cosinus. En déduire une expression de $\cos(\theta)$.