

Calcul intégrale

On recherche à calculer $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$.

1. Montrer que, pour $x \in [0, \pi/4]$, $\tan(\pi/4 - x) = \frac{1 - \tan(x)}{1 + \tan(x)}$.
2. Avec le changement de variable $u = \pi/4 - x$, montrer que $I = \int_0^{\pi/4} \ln(2) du - I$.
En déduire la valeur de I .
3. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I = \int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\cos x (\cos x + \sin x)}$.

1. Pour $x \in [0, \pi/4]$, $\tan(\pi/4 - x) = \frac{\tan(\pi/4) + \tan(-x)}{1 - \tan(\pi/4) \tan(-x)} = \frac{1 - \tan(x)}{1 + \tan(x)}$.

Car $\tan(\pi/4) = 1$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$.

2. On pose $u = \pi/4 - x$ et $du = -dx$. Donc $I = \int_{\pi/4}^0 \ln(1 + \tan(\pi/4 - u))(-du) = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(\pi/4 - u)) du$
 $= \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u}\right) du$ d'après a.
 $= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan u}\right) du$
 $= \int_0^{\pi/4} \ln(2) du - \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan u) du$ par linéarité
 $= \frac{\pi}{4} \ln 2 - I$.

Donc $I = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I$ montre que $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

3. On a $I = \int_0^{\pi/4} 1 \times \ln(1 + \tan x) dx$
 $= [x \ln(1 + \tan(x))]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} x \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{1 + \tan x} dx$
 $= \frac{\pi}{4} \ln 2 - 0 - \int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\cos x (\cos x + \sin x)}$.

On en déduit que $\int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\cos x (\cos x + \sin x)} = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

Intégrale de Wallis

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.

1. Calculer W_0, W_1 et W_2 .
 2. Montrer que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée.
 3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
 4. Montrer que $W_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$.
 5. Montrer que la suite $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ est constante.
 6. En déduire une expression de W_{2n+1} .
1. On a $W_0 = [t]_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$.
 Puis $W_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.
 2. Pour $t \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \sin t \leq 1$ donc $0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$. Donc par croissance de l'intégrale $\int_0^{\pi/2} 0 \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t) dt \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$ c'est à dire $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$. Ainsi $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0.
 3. On a $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sin(t) \times \sin^{n+1}(t) dt$
 $= [-\cos(t) \sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos t)(n+1) \cos(t) \sin^n(t) dt$
 $= (0 - 0) + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^n(t) dt$
 $= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t) dt$
 $= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$ par linéarité.
 Cette équation se résout bien en $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
 4. On démontre la relation par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$.
 Initialisation $n = 0$: $W_0 = \frac{\pi}{2}$ d'après la 1er question.
 Hérédité : $W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n}$ d'après la question précédente
 $= \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2} \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$ par hypothèse de récurrence
 $= \frac{(2n+2)! \pi}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}$.
 5. On a $u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = u_n$ donc la suite est constante. La constant vaut $u_0 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$.
 6. On obtient $(2n+1)W_{2n+1}W_{2n} = \frac{\pi}{2}$ avec $W_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$.
 Donc on en déduit que $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.