

DM2 - Corrigé

Exercice 1 : a) On peut étudier les variations de $p(x) = x^2 + x + 1$ un polynôme. On a $p'(x) = 2x + 1$. Donc les variations changent en $x = -1/2$. Ainsi f est strictement croissante sur $] -\infty, -1/2]$ et strictement décroissante sur $[-1/2, +\infty[$.

Les limites sont $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$ et $f(-1/2) = 4$. Donc $f(\mathbb{R}) =]0, 4]$.

b) On résout $x \in f^*\{1\}$ ssi $f(x) = 1$ ssi $3 = x^2 + x + 1$ ssi $x^2 + x - 2 = 0$ ssi $x \in \{1, -2\}$.
Donc les antécédents de 1 par f sont $f^*\{1\} = \{1, -2\}$. En particulier f n'est pas injective.

De même $x \in f^*([1, 3])$ ssi $f(x) \in [1, 3]$.

On peut remarquer que $1 = f(1) = f(-2)$ et $3 = f(0) = f(-1)$.

Pour $x > -1/2$, on a $f(1) = 1 \leq f(x) \leq 3 = f(0)$ ssi $1 \geq x \geq 0$ par décroissance sur $[-1/2, +\infty[$.

Pour $x < -1/2$, on a $f(-2) = 1 \leq f(x) \leq 3 = f(-1)$ ssi $-2 \leq x \leq -1$ par croissance sur $] -\infty, -1/2]$.

Ainsi $f^*([1, 3]) = [-2, -1] \cup [0, 1]$.

c) On sait que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et $g(0) = 3, \lim_{+\infty} g = 0$. Donc d'après le théorème de la bijection continue g est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]0, 3]$.

Pour $x > 0$ et $y \in]0, 3]$.

On a $g(x) = y$ ssi $\frac{1}{x^2+x+1} = y$ ssi $x^2 + x + 1 = \frac{1}{y}$ ssi $x^2 + x + 1 - \frac{1}{y} = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 1 + 4(1 - 1/y) = 5 - 4/y > 5 - 4/3 = 11/3 > 0$.

Donc $x = \frac{1+\sqrt{5-4/y}}{2} > 0$ est l'unique solution.

Ainsi $g^{-1}(y) = \frac{1+\sqrt{5-4/y}}{2}$.

Exercice 2 : 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\text{sh}(x^2) - 1 > 0$ ssi $x^2 > \text{Argsh}(1) = \alpha > 0$
ssi $x \in] -\infty, -\sqrt{\alpha}[\cup]\sqrt{\alpha}, +\infty[= D_a$.

avec $\alpha > 0$ l'unique solution de $\text{sh}(\alpha) = 1$ ssi $\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = 1$ ssi e^α racine de $X^2 - 2X - 1$
ssi $e^\alpha = 1 + \sqrt{2}$ car la deuxième racine $1 - \sqrt{2}$ est négative.

Ainsi $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$.

Ainsi a est de classe C^∞ sur D_a comme composée.

Pour $x \in D_a$, on a : $a'(x) = 2x \text{ch}(x^2) \frac{1}{2\sqrt{\text{sh}(x^2)-1}} = \frac{x \text{ch}(x^2)}{\sqrt{\text{sh}(x^2)-1}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$. Et $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) > 0$ ssi $x \in] -\infty, -1[\cap]1, +\infty[$.

Donc par opérations, b est de classe C^∞ sur $] -\infty, -1[\cap]1, +\infty[$.

Pour $x \in] -\infty, -1[\cap]1, +\infty[$, on a $b(x) = \ln(x^2 - 2x + 3) - \ln(x^2 - 1)$.

Donc $b'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+3} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2(x^2-4x+1)}{(x^2-2x+3)(x^2-1)}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $-1 < \frac{1-x}{1+x} < 1$ ssi $x \in \mathbb{R}_+^*$.

En effet $1 - \frac{1-x}{1+x} = \frac{2x}{1+x} > 0$ ssi $x > 0$ ou $x < -1$.

Et $\frac{1-x}{1+x} - (-1) = \frac{2}{1+x} > 0$ ssi $x > -1$.

Donc par opération c est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x > 0$, on a $c'(x) = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1+x)^2} \frac{-1}{\sqrt{1-[(1-x)/(1+x)]^2}}$

$= \frac{2}{(1+x)^2} \frac{-\sqrt{(1+x)^2}}{\sqrt{(1+2x+x^2)-(1-2x+x^2)}}$

$= \frac{-2}{(1+x)\sqrt{4x}} = \frac{-1}{(x+1)\sqrt{x}}$.