

Equations différentielles

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Solution de l'équation homogène associée sur un intervalle.

Les solutions générales sont somme d'une solution particulière et des solutions homogènes.

Principe de superposition lorsque le second membre est une combinaison linéaire.

Recherche d'une solution particulière de $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$

Solution de la forme $y(t) = Q(t)e^{\beta t}$ lorsque a est constant et $b(t) = P(t)e^{\beta t}$. (admis)

Méthode de Lagrange de la variation de la constante.

Problème de Cauchy : il existe une unique solution soumise à une condition initiale.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Résolution de l'équation homogène grâce aux racines du polynôme caractéristique.

Expression des solutions réelles sans passage aux complexes.

Principe de superposition lorsque le second membre est une combinaison linéaire.

Recherche d'une solution particulière de $y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = b(t)$

Solution de la forme $y(t) = Q(t)e^{\beta t}$ lorsque $b(t) = P(t)e^{\beta t}$. (admis)

Problème de Cauchy : il existe une unique solution soumise à deux conditions initiales.

Liste de Questions de cours :

- a) Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] -1, 1[$. En calculant sa dérivée, montrer que $\text{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$.
- b) Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties puis calculer $\int_0^x \text{Arctan}(t) dt$.
- c) Énoncer et démontrer la formule de changement de variables puis calculer $\int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt$.
- d) Énoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL1 à coefficients non constants.
- e) Énoncer et démontrer le principe de superposition pour l'ordre 1.
- f) Énoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL2 à coefficients constants sur $\mathbb{C}$.

Exercices d'Application du Cours

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y'(t) - 2y(t) = te^t$.

(b) $ty'(t) - 2y(t) = \frac{t}{t+1}$ pour $t > 0$.

(c) $y'(t) + \frac{t^2-t}{t^2+t+1}y(t) = te^t$.

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y'' + 5y' + 6y = e^t \sin(t)$.

(b) $y'' + 2y' + 5y = te^t$.

(c) $y'' + 4y' + 4y = \operatorname{ch}(2t)$.

Devoir libre

1. On recherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire $y' - y = t\sqrt{y}$.

On ajoute la condition initiale $y(0) = 1$.

(a) On pose $z(t) = \sqrt{y(t)}$ lorsque cela est possible.

Montrer que l'équation s'écrit $2z'(t) - z(t) = t$.

(b) Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} 2z' - z = t \\ z(0) = 1 \end{cases}.$$

(c) Déterminer sur quel intervalle contenant 0 la fonction z est-elle positive ?

(d) En déduire la solution y sur ce domaine maximal.

2. On recherche à résoudre l'équation à coefficients non constants

$$x^2 y''(x) + 3xy'(x) - 3y(x) = x^2 + 1.$$

On ajoute les conditions initiales $y(1) = y'(1) = 0$.

(a) On pose $t = \ln x$ et $z(t) = y(e^t)$ lorsque cela est possible.

Montrer que l'équation s'écrit $z''(t) + 2z'(t) - 3z(t) = e^{2t} + 1$.

(b) Déterminer les conditions initiales en $z(t)$ et résoudre le problème de Cauchy associé.

(c) En déduire $y(x)$ et préciser sur quel domaine contenant $x = 1$ la solution est valable.