

Équation différentielle de Bernoulli

On recherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire $y' - y = t\sqrt{y}$.

On ajoute la condition initiale $y(0) = 1$.

1. On pose $z(t) = \sqrt{y(t)}$ lorsque cela est possible.
Montrer que l'équation s'écrit $2z'(t) - z(t) = t$.
2. Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} 2z' - z = t \\ z(0) = 1 \end{cases}.$$
3. Déterminer sur quel intervalle contenant 0 la fonction z est-elle positive ?
4. En déduire la solution y sur ce domaine maximal.

1. La fonction $z(t) = \sqrt{y(t)}$ est de classe C^1 lorsque $y > 0$.

On pose $A = y^*(]0, +\infty[) = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(t) > 0\}$. On sait que A est non vide car $y(0) = 1$ donc $0 \in A$.

$$\text{Pour } t \in A, z'(t) = \frac{y'(t)}{2\sqrt{y(t)}} = \frac{y'(t)}{2z(t)}.$$

Donc $y' - y = t\sqrt{y}$ ssi $2zz' - z^2 = tz$ ssi $2z'(t) - z(t) = t$ car $z(t) > 0$.

2. On résout l'EDL1 $z' = \frac{1}{2}z + \frac{t}{2}$ pour $t \in A$.

On a $z_h(t) = \lambda e^{t/2}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Puis on recherche une solution particulière sous la forme $z_p(t) = at + b$ (car ici $\beta = 0$)

On obtient $2a - (at + b) = t$ puis $a = -1$ et $b = -2$ donc $y_p(t) = -t - 2$.

Ainsi $z(t) = \lambda e^{t/2} - t - 2$ avec la condition $y(0) = 1$ qui donne bien $z(0) = \sqrt{1} = 1$.

Donc $\lambda - 2 = 1$ puis $\lambda = 3$. Enfin $\boxed{z(t) = 3e^{t/2} - t - 2}$.

3. On étudie la fonction z pour déterminer son signe au voisinage de 0.

On a $z'(t) = \frac{3}{2}e^{t/2} - 1$ change de signe en $t_0 = 2\ln(2/3) < 0$.

Puis $z(t_0) = 2z'(t_0) - t_0 = -t_0 > 0$. Donc z atteint un minimum global en t_0 et la valeur est strictement positive. Ainsi z est toujours strictement positive. Donc $A = \mathbb{R}$.

Puis pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \sqrt{z(t)} = \sqrt{3e^{t/2} - t - 2}$ est la solution maximale.

Equation de Cauchy-Euler

On recherche à résoudre l'équation à coefficients non constants

$$x^2 y''(x) + 3xy'(x) - 3y(x) = x^2 + 1.$$

On ajoute les conditions initiales $y(1) = y'(1) = 0$.

- On pose $t = \ln x$ et $z(t) = y(e^t)$ lorsque cela est possible.
Montrer que l'équation s'écrit $z''(t) + 2z'(t) - 3z(t) = e^{2t} + 1$.
 - Déterminer les conditions initiales en $z(t)$ et résoudre le problème de Cauchy associé.
 - En déduire $y(x)$ et préciser sur quel domaine contenant $x = 1$ la solution est valable.
- Soit $x > 0$. On recherche y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on sait que $t \mapsto e^t$ est de classe C^∞ donc la composée $t \mapsto z(t) = y(e^t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Puis $z'(t) = e^t y'(e^t) = xy'(x)$ et $z''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t) = x^2 y''(x) + xy'(x)$.
Donc $z''(t) + 2z'(t) - 3z(t) = [x^2 y''(x) + xy'(x)] + 2xy'(x) - 3y(x) = x^2 y''(x) + 3xy'(x) - 3y(x) = x^2 + 1 = e^{2t} + 1$.
 - Les conditions initiales sont pour $x = 1$ donc $t = \ln x = 0$. Ainsi $z(0) = y(1) = 0$ et $z'(0) = 1y'(1) = 0$.
Le polynôme caractéristique de l'EDL2 en z est $X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$. Donc les solutions homogènes sont $t \mapsto \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-3t}$ pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
On recherche une solution à l'équation $z_1'' + 2z_1' - 3z_1 = e^{2t}$ sous la forme $z_1(t) = ae^{2t}$ avec $\chi(2) = 5$. On obtient dans l'équation $5a = 1$ donc $a = \frac{1}{5}$ et $z_1(t) = \frac{1}{5}e^{2t}$.
On recherche une solution à l'équation $z_2'' + 2z_2' - 3z_2 = 1$ sous la forme $z_2(t) = a$ avec $\chi(0) = -3$. On obtient dans l'équation $-3a = 1$ donc $a = -\frac{1}{3}$ et $z_2(t) = -\frac{1}{3}$.
Ainsi $z(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{3}$.
Puis $z'(t) = \lambda_1 e^t - 3\lambda_2 e^{-3t} + \frac{2}{5}e^{2t}$.
Donc $\begin{cases} z(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{cases} \text{ssi} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + (1/5) - (1/3) = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + (2/5) = 0 \end{cases} \text{ssi} \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 2/15$.
Donc $z(t) = \frac{2}{15}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{3}$.
 - On obtient $y(x) = \frac{2}{15}x^{-3} + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}$.
Donc y est définie sur $\mathbb{R}^*$ et la résolution est valable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ contenant $x = 1$.