

Chapitre 12 : Variables aléatoires

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Dans tout le chapitre, on considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

1 Définition et exemples

Définition. On appelle variable aléatoire sur Ω à valeurs dans un ensemble E toute application $X : \Omega \rightarrow E$.

Si $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire réelle.

L'ensemble image $X(\Omega) \subset E$ s'appelle l'univers de X , un élément $x \in X(\Omega)$ est un aléa de X et une partie $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ est un évènement suivant X .

Proposition 1.1. Soit $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$ une variable aléatoire sur Ω .

On définit l'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1], A \mapsto \mathbb{P}(X \in A)$ avec :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \in A\}. \quad (1)$$

Le couple $(X(\Omega), \mathbb{P}_X)$ forme un espace probabilisé fini.

⊗ Pour un aléa $x \in X(\Omega)$, on définit $\mathbb{P}_X\{x\} = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = x\}$.

Définition. On dispose des trois lois de références :

a) On dit que $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ suit une loi de Bernoulli et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si :

$$X(\Omega) = \{0, 1\}, \mathbb{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p. \quad (2)$$

b) On dit que $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$ suit une loi uniforme et on note $X \sim \mathcal{U}(X(\Omega))$ si :

$$\text{Card}(X(\Omega)) = n \text{ et pour tout } x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}. \quad (3)$$

c) On dit que $X : \Omega \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket$ suit une loi binomiale et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (4)$$

⊗ On dit qu'une variable aléatoire est constante si :

il existe une valeur $x_0 \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x_0) = 1$, on dit que $X = x_0$ presque sûrement.

⊗ Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, l'indicatrice $\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

Définition. Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire à valeurs dans E et $f : E \rightarrow F$ une application.

On définit la variable aléatoire $f(X)$ comme étant la composée $f \circ X : \Omega \rightarrow F$.

2 Espérance

Définition. Pour une variable aléatoire réelle X , on définit son espérance et on note :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\{\omega\} X(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) x. \quad (5)$$

- ⊗ Elle représente la moyenne des aléas pondérées par leurs probabilités.
- ⊗ L'espérance d'une variable aléatoire constante est la valeur atteinte presque sûrement.

Proposition 2.1. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = p$.

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

- ⊗ En particulier, on a $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Proposition 2.2. Pour deux variables aléatoires X et Y réelles, on a :

$$\text{Pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y). \quad (\text{Linéarité de l'espérance})$$

$$\text{Si } X \leq Y \text{ presque sûrement alors } \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y). \quad (\text{Croissance de l'espérance})$$

Théorème 2.3 (Théorème de Transfert). Pour $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) f(x). \quad (6)$$

- ⊗ En particulier, on définit les moments d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de X comme étant :

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) x^k.$$

3 Variables aléatoires indépendantes

3.1 Couples de variables aléatoires

Définition. Soient $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires. On définit le couple $(X, Y) : \Omega \rightarrow E \times F$ par la correspondance :

$$\text{Pour tout aléa } \omega \in \Omega, (X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)). \quad (7)$$

Considérons des aléas $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$. On définit la loi conjointe du couple par :

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x, y)\} = \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)), \quad (8)$$

les lois marginales du couple sont données par :

$$\mathbb{P}_X\{x\} = \mathbb{P}(X = x) \text{ et } \mathbb{P}_Y\{y\} = \mathbb{P}(Y = y). \quad (9)$$

Proposition 3.1. La loi du couple permet de reconstruire les deux lois marginales par :

$$\text{Pour tout } x_0 \in X(\Omega), \mathbb{P}_X\{x_0\} = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x_0, y)\}, \quad (10)$$

$$\text{Pour tout } y_0 \in Y(\Omega), \mathbb{P}_Y\{y_0\} = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x, y_0)\}. \quad (11)$$

3.2 Indépendance d'un couple

Définition. Soient deux variables aléatoires X et Y sur Ω .

Pour un aléa $x_0 \in X(\Omega)$, on définit la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x_0)$ par :

$$\mathbb{P}_{Y|X=x_0}(B) = \mathbb{P}(Y \in B | X = x_0) = \frac{\mathbb{P}((X = x_0) \cap (Y \in B))}{\mathbb{P}(X = x_0)}. \quad (12)$$

Pour un évènement $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, on définit la loi conditionnelle de Y sachant $(X \in A)$ par :

$$\mathbb{P}_{Y|X \in A}(B) = \mathbb{P}(Y \in B | X \in A) = \frac{\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B))}{\mathbb{P}(X \in A)}. \quad (13)$$

On dit que X et Y sont indépendantes et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si ces lois conditionnelles sont la loi $\mathbb{P}_Y$.

⊗ On définit de manière symétrique la loi conditionnelle de X sachant un aléa ou un évènement suivant Y .

Proposition 3.2. *Les variables X et Y sont indépendantes ssi on dispose d'une des propriétés :*

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x, y)\} = \mathbb{P}_X\{x\}\mathbb{P}_Y\{y\}. \quad (14)$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \forall B \in \mathcal{P}(Y(\Omega)), \mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B). \quad (15)$$

Théorème 3.3. *Si X et Y sont deux variables indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*

Proposition 3.4. *Soient f et g deux applications et X et Y deux variables aléatoires indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

3.3 Indépendance mutuelle d'une famille

Définition. *Soient $X_1, \dots, X_n$ une famille de variables aléatoires.*

On dit que les variables sont mutuellement indépendantes si pour toutes familles d'évènements : $A_1 \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)), A_2 \in \mathcal{P}(X_2(\Omega)), \dots$ et $A_n \in \mathcal{P}(X_n(\Omega))$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i). \quad (16)$$

⊗ Toute sous-famille d'une famille mutuellement indépendante est encore mutuellement indépendantes.

Proposition 3.5. *Une famille $X_1, \dots, X_n$ est mutuellement indépendante ssi : : pour tout aléa $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i). \quad (17)$$

Lemme 3.6. *(des coalitions) Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.*

Théorème 3.7. *Soient $X_1, \dots, X_n$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent une même loi de Bernoulli $X_k \sim \mathcal{B}(p)$ alors $S = \sum_{k=1}^n X_k$ est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $S \sim \mathcal{B}(n, p)$.*

4 Variance, Ecart type et Covariance

Définition. *Pour une variable aléatoire réelle X , on définit la variance notée $\mathbb{V}(X)$ par :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2). \quad (\text{Variance})$$

De plus, on appelle écart type le nombre $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

⊗ Pour toute variable X , $\mathbb{V}(X) \geq 0$.

Proposition 4.1. *On dispose de la formule de Koenig-Huygens :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2. \quad (18)$$

Proposition 4.2. *On dispose des formules de référence :*

- a) *Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.*
- b) *Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$.*
- c) *Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$.*

Proposition 4.3. On dispose des propriétés suivantes :

- a) Pour toute variable X , si $\mathbb{V}(X) = 0$ alors X est une variable aléatoire constante.
- b) Pour toute variable X et des coefficients $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X). \quad (19)$$

⊗ En particulier, si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ et $n = b - a + 1$ alors $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$.

Définition. On dit que X est centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$.

On dit que X est réduite si $\mathbb{V}(X) = 1$.

⊗ Si X est une variable aléatoire non constante alors $X_0 = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Définition. Pour deux variables aléatoires X et Y réelles, on définit leurs covariances par :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]. \quad (20)$$

Si $\text{Cov}(X, Y) = 0$ alors on dit que X et Y sont décorrélées.

Proposition 4.4. On a : $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Si X et Y sont indépendantes alors X et Y sont décorrélées.

On a : $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$

⊗ La covariance est symétrique et bilinéaire et on a $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.

Théorème 4.5 (Pythagore). Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y). \quad (21)$$

Théorème 4.6 (Inégalité de Markov). Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire positive.

Pour tout $\lambda > 0$, on a $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$.

⊗ Si on recherche les valeurs qui sont supérieures à 10 fois l'espérance, la formule donne que ces valeurs sont moins d'un sur dix. Avec $\lambda = 10\mathbb{E}(X)$, on obtient $\mathbb{P}(X \geq 10\mathbb{E}(X)) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{10\mathbb{E}(X)} = \frac{1}{10}$.

Théorème 4.7 (Bienaymé-Tchebichev). Soit X une variable aléatoire réelle et $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} = \left(\frac{\sigma(X)}{\varepsilon} \right)^2. \quad (22)$$

⊗ La formule permet de quantifier la rareté des valeurs hors des intervalles $[\mathbb{E}(X) - \varepsilon, \mathbb{E}(X) + \varepsilon]$ c'est à dire les voisinages de l'espérance. Dans la pratique, on prend ε étant un multiple de l'écart type $\sigma(X)$.

⊗ Ceci permet dans déduire la loi faible des grands nombres.

Pour X une variable aléatoires réelles quelconques, on considère $X_1, \dots, X_n$ des copies mutuellement indépendantes de X et on pose $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ leur moyenne.

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (23)$$

Ceci signifie que la variable aléatoire M_n tend vers la constante $\mathbb{E}(X)$ lorsque n est grand.