

Chapitre 11 : Probabilités

Dr Nicolas Provost - PCSII - LMB

1 Espaces probabilisés finis

Définition. L'ensemble Ω des issues (ou aléas) d'une expérience aléatoire est appelé univers.

Une partie $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ s'appelle un évènement.

On munit l'univers Ω d'une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ appelée loi de probabilité qui associe à tout évènement sa fréquence de réalisation et vérifie :

— La loi est unitaire : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

— La loi est additive : Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ disjoints, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On dit que le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini.

Proposition 1.1. Tout univers fini Ω peut être muni de l'équiprobabilité définie par :

$$\text{Pour tout évènement } A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}. \quad (1)$$

Définition. On dispose des transcriptions des notions ensemblistes dans le vocabulaire probabiliste.

L'ensemble vide $\emptyset$ s'appelle l'évènement impossible.

Les singletons $\{\omega\}$ s'appellent des évènements élémentaires.

Le complémentaire $\bar{A}$ s'appelle l'évènement contraire.

L'intersection $A \cap B$ s'appelle l'évènement 'A et B'.

L'union $A \cup B$ s'appelle l'évènement 'A ou B'.

On dit que A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$ (i.e. si ils sont disjoints).

On dit que $A_1, \dots, A_n$ forment un système complet d'évènements incompatibles si ils forment une partition de Ω .

⊗ Pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, A et $\bar{A}$ forment un système complet d'évènements incompatibles.

Proposition 1.2. On dispose des formules :

a) (Croissance) Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

b) Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

c) Pour $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Proposition 1.3. Dans un espace probabilisé fini, toute loi de probabilité $\mathbb{P}$ est entièrement déterminée par sa restriction aux évènements élémentaires. La donnée de $p : \Omega \rightarrow [0, 1], \omega \mapsto \mathbb{P}\{\omega\}$ sous l'unique condition d'être unitaire $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\{\omega\} = 1$ permet de construire $\mathbb{P}$ via :

$$\text{Pour tout évènement } A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}\{\omega\}. \quad (2)$$

Définition. Pour modéliser une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité d'un Succès $p \in [0, 1]$, on peut définir $\Omega = \{0, 1\}^n$. Un aléa $\omega = (b_1, \dots, b_n)$ traduit la succession par $b_k = 1$ ssi la k -ième expérience est un succès. On peut définir :

$$\mathbb{P}\{(b_1, \dots, b_n)\} = p^k (1-p)^{n-k} \text{ avec } k = \sum_{i=1}^n b_i \text{ le nombre total de succès de l'aléa.} \quad (3)$$

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Les formules des probabilités conditionnelles

Définition. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux évènements tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On définit la probabilité de A sachant B et on note :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \quad (4)$$

Proposition 2.1. Pour un évènement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, l'application : $\mathbb{P}_B : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1], A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une loi de probabilité sur Ω .

Proposition 2.2 (Formule des probabilités composées). Pour deux évènements $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ de probabilités non nulles, on a :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2). \quad (5)$$

Pour n évènements $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ de probabilités non nulles, on a :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \dots \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}_{\cap_{i < k} B_i}(B_k). \quad (6)$$

Proposition 2.3 (Formule des probabilités totales). Soient $A_1, \dots, A_n$ un système complet d'évènements incompatibles de probabilités non nulles. Pour tout évènement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B). \quad (7)$$

Proposition 2.4 (Formules de Bayes). Pour deux évènements A et B de probabilités non nulles :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}. \quad (8)$$

Pour $A_1, \dots, A_n$ un système complet d'évènements incompatibles de probabilités non nulles. Pour tout évènement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}. \quad (9)$$

2.2 Indépendances des évènements

Définition. Soient A et B deux évènements.

On dit que A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Soient $A_1, \dots, A_n$ une famille d'évènements. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si pour toutes sous-familles $A_{i_1}, \dots, A_{i_p}$, on a : $\mathbb{P}(\cap_{k=1}^p A_{i_k}) = \prod_{k=1}^p \mathbb{P}(A_{i_k})$.

Proposition 2.5. Si A et B sont indépendants alors $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

⊗ Si A et B sont indépendants alors les évènements contraires sont également indépendants

Proposition 2.6. Si $A_1, \dots, A_n$ sont une famille d'évènements mutuellement indépendants alors ils sont deux à deux indépendants.

⊗ La réciproque est fausse. Par exemple, pour le lancé de deux dés équilibrés D_1 et D_2 . Les évènements suivants sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendant :

$$A = \{D_1 \text{ est pair}\}, B = \{D_2 \text{ est pair}\} \text{ et } C = \{D_1 + D_2 \text{ est impair}\}.$$

On a : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/4$ mais $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$.