

Chapitre 10 : Dénombrement

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Définition. Soit A un ensemble non vide et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que A est de cardinal n s'il existe une bijection $\varphi : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow A$. Dans ce cas, on note $n = \text{Card}(A) = |A|$.

1 Opérations sur les ensembles

Proposition 1.1. Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E .

- a) Si A et B sont disjoints alors $\text{Card}(A \uplus B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
- b) Si $B \subset A$ alors $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(B)$.
- c) On a : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

Proposition 1.2. Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis.

- a) On a : $\text{Card}(E_1 \times E_2) = \text{Card}(E_1)\text{Card}(E_2)$.
- b) On a : $\text{Card}(\mathcal{F}(E_1, E_2)) = \text{Card}(E_2)^{\text{Card}(E_1)}$.
- c) On a : $\text{Card}(\mathcal{P}(E_1)) = 2^{\text{Card}(E_1)}$.

2 Propriétés des ensembles et applications

Proposition 2.1. Pour deux ensembles A_1 et A_2 de cardinal fini.

On a $A_1 = A_2$ ssi deux des trois propriétés sont vérifiées :

- (i) $A_1 \subset A_2$.
- (ii) $A_2 \subset A_1$.
- (iii) $\text{Card}(A_1) = \text{Card}(A_2)$.

Proposition 2.2. Soit $f : A \rightarrow B$ une application entre deux ensembles finis.

- a) Si f est injective alors $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$.
- b) Si f est surjective alors $\text{Card}(A) \geq \text{Card}(B)$.

Théorème 2.3. Soit $f : A \rightarrow B$ une application entre deux ensembles finis.

L'application f est bijective ssi deux des trois propriétés sont vérifiées :

- (i) f est injective.
- (ii) f est surjective.
- (iii) $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$.

3 Listes et Combinaisons

Définition. On dénombre l'ensemble des listes de p éléments distincts parmi n éléments et on appelle nombre d'arrangements :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \text{Card} \{(a_1, \dots, a_p) \text{ pour } a_k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ 2 à 2 distincts}\}. \quad (1)$$

On dénombre l'ensemble des parties de p éléments parmi n éléments et on appelle nombre de combinaisons :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \text{Card}(\mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket)), \quad (2)$$

avec $\mathcal{P}_k(E) = \{A \text{ tel que } A \subset E \text{ et } \text{Card}(A) = k\}$ est l'ensemble des parties de E de cardinal k .

Proposition 3.1. Soient A et B deux ensembles finis avec $\text{Card}(A) = p$ et $\text{Card}(B) = n$.
Le nombre d'injections de A vers B est le nombre d'arrangement A_n^p .

⊗ En particulier, le nombre de bijections entre deux ensembles de n éléments est $A_n^n = n!$. Ceci correspond au nombre de permutations de n éléments.

Théorème 3.2. La définition combinatoire des coefficients binomiaux permettent de justifier :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (\text{Formule du Binôme de Newton})$$

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p} \quad (\text{Formule de symétrie})$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \quad (\text{Formule du Triangle de Pascal})$$