

Chapitre 16 : Applications linéaires

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps des scalaires.

1 Généralités

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si elle respecte les opérations :

Addition interne : $\forall u, v \in E, f(u + v) = f(u) + f(v)$.

Produit externe : $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda.u) = \lambda.f(u)$.

On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Lorsque $E = F$, on dit que f est un endomorphisme et on note plus simplement $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

⊗ Pour montrer que f est linéaire, il suffit de vérifier directement la combinaison linéaire

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v). \quad (1)$$

Proposition 1.1. L'ensemble des applications linéaires $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Proposition 1.2. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires alors la composée $g \circ f : E \rightarrow G$ est une application linéaire.

⊗ La composée est une opération associative, distributive par rapport à la somme à droite et à gauche mais pas commutative.

Définition. Pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, on définit les puissances par récurrence :

$$f^0 = id_E \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f^n \circ f. \quad (2)$$

Théorème 1.3 (Formule du binôme de Newton). Si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent (i.e. $f \circ g = g \circ f$) alors :

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}. \quad (3)$$

1.2 Image et Noyau d'une application linéaires

Définition. Pour une application linéaire $f : E \rightarrow F$ entre deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On définit les sous-espaces vectoriels suivants :

Le noyau : $\text{Ker } f = \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 0_F\}$ sous-espace de E .

L'image : $\text{Im } f = \{f(x) \text{ pour } x \in E\}$ sous-espace de F .

⊗ Le noyau est défini à l'aide d'une équation linéaire $f(x) = 0_F$. Dans la pratique, on le détermine en résolvant un système linéaire homogène.

⊗ L'image est définie par un paramétrage. On peut préciser son expression avec le résultat suivant dans le cas de la dimension finie.

Proposition 1.4. Si E est de dimension finie engendré par une famille $(e_1, \dots, e_n)$ alors :

$$\text{Im}f = f(\text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, \dots, e_n)) = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(f(e_1), \dots, f(e_n)). \quad (4)$$

Théorème 1.5. Soient $f : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On a :

- a) f est injective ssi $\text{Ker}f = \{0_E\}$.
- b) f est surjective ssi $\text{Im}f = F$.

Proposition 1.6. Soit $f : E \rightarrow F$ et $b \in F$. Les équations $f(u) = b$ sont dites linéaires.

Si $b \in \text{Im}f$ alors l'équation est compatible et pour $u_p \in E$ une solution particulière alors l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = u_p + \text{Ker}f$.

Si $b \notin \text{Im}f$ alors l'équation n'admet pas de solution $\mathcal{S} = \emptyset$.

2 Modes de définition et endomorphismes remarquables

Proposition 2.1. Si E est de dimension finie alors toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ est entièrement déterminée par l'image d'une base de E .

Proposition 2.2. Si $E = E_1 \oplus E_2$ se décompose en somme directe alors toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ est entièrement déterminée par ses restrictions $f|_{E_1}$ et $f|_{E_2}$.

Définition. On dispose d'endomorphismes remarquables de E .

Les applications λid_E sont les homothéties de rapport $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Si $E = E_1 \oplus E_2$ est une décomposition en somme directe, on définit le projecteur sur E_1 le long de E_2 par :

$$p|_{E_1} = \text{id}_{E_1} \text{ et } p|_{E_2} = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E_2)}. \quad (5)$$

De plus, on définit la symétrie par rapport à E_1 le long de E_2 par :

$$s|_{E_1} = \text{id}_{E_1} \text{ et } s|_{E_2} = -\text{id}_{E_2}. \quad (6)$$

En particulier, si $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2$ alors $p(x) = x_1$ et $s(x) = x_1 - x_2$.

Proposition 2.3. Un endomorphisme p est un projecteur ssi $p^2 = p$.

Dans ce cas, c'est le projecteur sur $\text{Im}p$ le long de $\text{Ker}p$.

⊗ Les vecteurs de l'image $\text{Im}p$ d'un projecteur vérifie $p(u) = u$. Ce sont les vecteurs invariants par p .

Proposition 2.4. Un endomorphisme s est une symétrie ssi $s^2 = \text{id}_E$.

Dans ce cas, c'est la symétrie par rapport aux vecteurs invariants $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ le long des vecteurs contravariants $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

3 Isomorphismes

Définition. On appelle isomorphisme toute application linéaire bijective.

On note $\text{Isom}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E vers F .

On dit que deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels F et G sont isomorphes si il existe un isomorphisme entre eux. Si $E = F$, les endomorphismes bijectifs sont appelés automorphismes. L'ensemble des automorphismes de E s'appelle le groupe linéaire de E et se note $GL(E)$.

Proposition 3.1. Pour $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux isomorphismes, on a :

- a) La réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est un isomorphisme.
- b) La composée $g \circ f$ est un isomorphisme.
- c) Le groupe linéaire $GL(E)$ est stable par composition, inverse et puissance.

⊗ L'isomorphie des espaces est une relation d'équivalence.

Théorème 3.2. Soit E de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E . Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- a) f est injective ssi $f(\mathcal{B})$ est une famille libre.
- b) f est surjective ssi $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F .
- c) f est un isomorphisme ssi $f(\mathcal{B})$ est une base de F .

Corollaire 3.3. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque. Les espaces sont isomorphes ssi E et F ont la même dimension.

Théorème 3.4. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire en dimension finie. L'application f est un isomorphisme ssi deux des trois assertions suivantes est vérifiées :

- f est injective.
- f est surjective.
- $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F$.

Corollaire 3.5. Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme en dimension finie. On a les équivalences :

$$f \text{ est un automorphisme} \Leftrightarrow f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} . \quad (7)$$

⊗ La dérivation $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ fournit un exemple d'endomorphisme en dimension infinie qui est surjectif mais pas injectif.

4 Rang d'une application linéaire

Définition. On dit qu'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est de rang finie si $\text{Im} f$ est un sous- $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Dans ce cas, on note $\text{rg}_{\mathbb{K}}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im} f)$.

Proposition 4.1. Si l'espace d'arrivé F est de dimension finie alors toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ est de rang finie et :

$$\text{rg}_{\mathbb{K}} f \leq \dim_{\mathbb{K}} F \text{ avec égalité ssi } f \text{ est surjective.} \quad (8)$$

Proposition 4.2. Si l'espace de départ E est de dimension finie alors toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ est de rang finie et :

$$\text{rg}_{\mathbb{K}} f \leq \dim_{\mathbb{K}} E \text{ avec égalité ssi } f \text{ est injective.} \quad (9)$$

⊗ Dans ce cas, on dispose en particulier d'une méthode de calcul à l'aide d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ de E :

$$\text{rg}_{\mathbb{K}} f = \text{rg}_{\mathbb{K}}(f(\mathcal{B}_E)) = \text{rg}_{\mathbb{K}}(f(e_1), \dots, f(e_n)). \quad (10)$$

Proposition 4.3. Pour deux applications linéaires $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ de rangs finies, on a :

$$\text{rg}_{\mathbb{K}}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}_{\mathbb{K}} f, \text{rg}_{\mathbb{K}} g). \quad (11)$$

Si u est un automorphisme de E et v un automorphisme de F , on obtient en particulier :

$$\text{rg}_{\mathbb{K}}(f \circ u) = \text{rg}_{\mathbb{K}} f \text{ et } \text{rg}_{\mathbb{K}}(v \circ f) = \text{rg}_{\mathbb{K}} f. \quad (12)$$

Théorème 4.4 (Théorème du rang). Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On suppose E de dimension finie alors :

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker} f) + \text{rg}_{\mathbb{K}} f. \quad (13)$$

⊗ La démonstration utilise la forme géométrique suivante du résultat. Pour S un supplémentaire de $\text{Ker} f$ dans E (i.e. $E = \text{Ker} f \oplus S$) la restriction $g : S \rightarrow \text{Im} f, u \mapsto f(u)$ est un isomorphisme.

Définition. On dit que $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire si f est linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que H est un hyperplan de E si il existe une droite supplémentaire D (i.e. $E = H \oplus D$)

⊗ Si $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ est de dimension finie alors H est hyperplan ssi $\dim_{\mathbb{K}} H = n - 1$.

⊗ Si H est un hyperplan alors toute droite D non contenue dans H convient à la définition.

Proposition 4.5. H est un hyperplan de E ssi il existe une forme linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ non nulle telle que $H = \text{Ker} f$.