

Chapitre 15 : Espaces vectoriels de dimension finie

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps des scalaires.

1 Définition de la dimension

Définition. On dit que E est de dimension finie si il admet une famille finie génératrice. Sinon on dit que E est de dimension infinie.

Théorème 1.1 (Base extraite). De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

- ⊗ Pour tout espace de dimension finie, il existe une base mais elle n'est pas unique.
- ⊗ La démonstration donne un algorithme de construction d'une base. On part d'une famille génératrice $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ de E . On complète la famille vide $\mathcal{B}_0 = ()$ avec les vecteurs de $\mathcal{F}$ en appliquant la règle :

- Si $u_{k+1} \in \text{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}_k)$ (i.e. u_{k+1} est déjà engendré), alors on conserve la famille : $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_k$.
- Si $u_{k+1} \notin \text{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}_k)$, alors on ajoute u_{k+1} à la famille : $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_k \cup (u_{k+1})$.

Toutes les familles $\mathcal{B}_k$ sont libres et $\mathcal{B}_n$ est génératrice de E . Ainsi $\mathcal{B}_n$ est une base de E .

Théorème 1.2 (Base incomplète). On suppose que l'espace est de dimension finie. Toute famille libre peut être complétée en une base.

Lemme 1.3. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

- ⊗ On dispose également de la contraposée. Si il existe une famille libre de $n + 1$ vecteurs alors toute famille de n vecteurs ne peut pas être génératrice de l'espace.

Théorème 1.4 (Définition de la dimension). Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de l'espace et on le note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

- ⊗ On dispose des exemples de références :

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n, \quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1, \quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np \text{ et } \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2. \quad (1)$$

Théorème 1.5. Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors une famille $\mathcal{F}$ est une base de E ssi elle vérifie deux des trois conditions :

- $\mathcal{F}$ est une famille libre.
- $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E .
- $\text{Card } \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{K}} E$.

2 Dimension des sous-espaces vectoriels

Définition. Pour toute famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E , le sous-espace engendré $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(u_1, \dots, u_p)$ est de dimension finie. On appelle rang de la famille $\mathcal{F}$ et on note :

$$\text{rg}_{\mathbb{K}}(u_1, \dots, u_p) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}_{\mathbb{K}}(u_1, \dots, u_p). \quad (2)$$

Proposition 2.1. Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathcal{B}$ est une base de E .

Alors on peut décomposer les vecteurs dans la base : $u_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ pour $1 \leq k \leq p$.

Le rang de la famille des vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ est donné par le rang de la matrice des coordonnées :

$$\text{rg}_{\mathbb{K}}(u_1, \dots, u_p) = \text{rg} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Proposition 2.2. On dispose des inégalités suivantes sur le rang d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$:

- a) On a $\text{rg}_{\mathbb{K}}\mathcal{F} \leq \dim_{\mathbb{K}}E$ avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est génératrice de E .
- b) On a $\text{rg}_{\mathbb{K}}\mathcal{F} \leq \text{Card}\mathcal{F}$ avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est libre.

Proposition 2.3. On suppose E de dimension finie.

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . On a $F_1 = F_2$ ssi deux des trois :

$$(i) \dim_{\mathbb{K}}F_1 = \dim_{\mathbb{K}}F_2 \quad (ii) F_1 \subset F_2 \quad (iii) F_2 \subset F_1 \quad (4)$$

Théorème 2.4. Soit E de dimension finie. Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E ssi deux des trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- La somme est directe : $F \cap G = \{0_E\}$.
- La somme est totale : $E = F + G$.
- La somme des dimensions : $\dim_{\mathbb{K}}F + \dim_{\mathbb{K}}G = \dim_{\mathbb{K}}E$.

Proposition 2.5. Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

⊗ Le supplémentaire n'est pas nécessairement unique mais ils ont tous la même dimension.

Théorème 2.6 (Formule de Grassmann). Pour deux sous-espaces vectoriels quelconques F et G de dimensions finies, on a :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}F + \dim_{\mathbb{K}}G - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G). \quad (5)$$